16/03/2020
DS no 5

Dérivaton de fonctions rationnelles

T^{ale}STMG

Exercice 1. *Une entreprise fabrique un engrais biologique liquide.*
Chaque jour, le volume d'engrais liquide fabriqué est compris entre $5\,\mathrm{m}^3$ et $60\,\mathrm{m}^3$.
Le coût moyen quotidien de production (exprimé en centaine d'euros) de cet engrais est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle [5 ; 60] par :

$$f(x) = x - 15 + \frac{400}{x}$$

où x est le volume quotidien d'engrais fabriqué, exprimé en m^3. La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère de la page ci-contre.

PARTIE A

1. *Quel est le coût moyen quotidien pour la production de $50\,\mathrm{m}^3$ d'engrais ?*
   Le coût moyen est $f(50) = 50 - 15 + \frac{400}{50} = 43$, soit 4 300 euros.
   On pouvait aussi lire sur le graphique que l'image de 50 est (environ) 43.

2. *Quels volumes d'engrais faut-il fabriquer pour avoir un coût moyen quotidien de production inférieur ou égal à 3 500 € ?*

   Méthode 1 (graphique) On cherche sur le graphique les abscisses des points de la courbe situés *au dessous* de l'ordonnée 35. Cela donne : $x \in [10; 40]$.

Méthode 2 (calcul) Résolvons l'inéquation $f(x) \geqslant 35$.

$$\begin{aligned} f(x) &\geqslant 35 \\ x - 15 + \frac{400}{x} &\geqslant 35 \\ x - 15 - 35 + \frac{400}{x} &\geqslant 0 \\ x - 50 + \frac{400}{x} &\geqslant 0 \\ \frac{x \times x}{x} - \frac{50 \times x}{x} + \frac{400}{x} &\geqslant 0 \\ \frac{x^2 - 50x + 400}{x} &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Étudions le signe du numérateur $x^2 - 50x + 400$: c'est un trinôme de discriminant $\Delta = (-50)^2 - 4 \times 1 \times 400 = 900$. Il est positif, donc il y a deux racines :

$x_1 = \frac{-(-50)-\sqrt{900}}{2\times1} = 10$

$x_2 = \frac{-(-50)+\sqrt{900}}{2\times1} = 40$

Le tableau de signes est donc (la troisième ligne est obtenue en multipliant les signes des deux premières) :

x	5		10		40		60
$x^2 - 50x + 400$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x		$+$		$+$		$+$	
$\frac{x^2-50x+400}{x}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc les solutions sont $x \in [10; 40]$.

PARTIE B

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle [5 ; 60]. On note f' sa fonction dérivée.

1. *Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle [5 ; 60] :*

$$f'(x) = \frac{x^2 - 400}{x^2}$$

On peut dériver séparément $x - 15$ d'une part, et $\frac{400}{x}$ d'autre part : la dérivée de la fonction $x \mapsto x - 15$ est $x \mapsto 1$, celle de la fonction $x \mapsto \frac{400}{x}$ est $x \mapsto -\frac{400}{x^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{400}{x^2} \\ &= \frac{x^2}{x^2} - \frac{400}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 400}{x^2} \end{aligned}$$

2. *Étudier le signe de $x^2 - 400$, pour tout x appartenant à l'intervalle [5 ; 60].*

Méthode 1 En factorisant : $x^2 - 400 = x^2 - 20^2 = (x - 20)(x + 20)$.
Donc :

x	5		20		60
$x - 20$		$-$	0	$+$	
$x + 20$		$+$		$+$	
$x^2 - 400 = (x - 20)(x + 20)$		$-$	0	$+$	

Méthode 2 On remarque que $x^2 - 400$ est un trinôme du second degré, avec $a = 1$, $b = 0$ et $c = -400$. Son discriminant est $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times (-400) = 1600$. Il y a donc deux racines.

$$x_1 = \frac{-0-\sqrt{1600}}{2\times1} = -20$$

$$x_2 = \frac{-0+\sqrt{1600}}{2\times1} = 20$$

Le tableau de signes du trinôme est donc :

x	5		20		60
$x^2 - 400$		$-$	0	$+$	

3. *En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle [5 ; 60].*

x	5		20		60
$x^2 - 400$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	
$f'(x) = \frac{x^2-400}{x^2}$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

4. *Pour quel volume d'engrais fabriqué le coût moyen quotidien de production est-il minimal ? Quel est ce coût moyen minimal ?*

   Nous voyons dans le tableau de variations de la question précédente que le minimum est atteint por $x = 20$. Donc le coût moyen quotidien de production est minimal pour $20\,\text{m}^3$ d'engrais vendus, et le coût moyen est alors $f(20) = 20 - 15 + \frac{400}{20} = 25$ centaines d'euros, soit 2 500 euros.