

Exercice 1. Une entreprise fabrique un engrais biologique liquide.

Chaque jour, le volume d'engrais liquide fabriqué est compris entre 5m^3 et 60m^3 .

Le coût moyen quotidien de production (exprimé en centaine d'euros) de cet engrais est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[5; 60]$ par :

$$f(x) = x - 15 + \frac{400}{x}$$

où x est le volume quotidien d'engrais fabriqué, exprimé en m^3 . La représentation graphique C_f de la fonction f est donnée dans le repère de la page ci-contre.

PARTIE A

1. Quel est le coût moyen quotidien pour la production de 50m^3 d'engrais ?

Le coût moyen est $f(50) = 50 - 15 + \frac{400}{50} = 43$, soit 4 300 euros.

On pouvait aussi lire sur le graphique que l'image de 50 est (environ) 43.

2. Quels volumes d'engrais faut-il fabriquer pour avoir un coût moyen quotidien de production inférieur ou égal à 3 500 € ?

Méthode 1 (graphique) On cherche sur le graphique les abscisses des points de la courbe situés au dessous de l'ordonnée 35. Cela donne : $x \in [10; 40]$.

Méthode 2 (calcul) Résolvons l'inéquation $f(x) \geq 35$.

$$\begin{aligned}
 f(x) &\geq 35 \\
 x - 15 + \frac{400}{x} &\geq 35 \\
 x - 15 - 35 + \frac{400}{x} &\geq 0 \\
 x - 50 + \frac{400}{x} &\geq 0 \\
 \frac{x \times x}{x} - \frac{50 \times x}{x} + \frac{400}{x} &\geq 0 \\
 \frac{x^2 - 50x + 400}{x} &\geq 0
 \end{aligned}$$

Étudions le signe du numérateur $x^2 - 50x + 400$: c'est un trinôme de discriminant $\Delta = (-50)^2 - 4 \times 1 \times 400 = 900$. Il est positif, donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-50) - \sqrt{900}}{2 \times 1} = 10$$

$$x_2 = \frac{-(-50) + \sqrt{900}}{2 \times 1} = 40$$

Le tableau de signes est donc (la troisième ligne est obtenue en multipliant les signes des deux premières) :

x	5	10	40	60	
$x^2 - 50x + 400$	+	0	-	0	+
x	+	+	+	+	
$\frac{x^2 - 50x + 400}{x}$	+	0	-	0	+

Donc les solutions sont $x \in [10; 40]$.

PARTIE B

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[5; 60]$. On note f' sa fonction dérivée.

1. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[5; 60]$:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 400}{x^2}$$

On peut dériver séparément $x - 15$ d'une part, et $\frac{400}{x}$ d'autre part : la dérivée de la fonction $x \mapsto x - 15$ est $x \mapsto 1$, celle de la fonction $x \mapsto \frac{400}{x}$ est $x \mapsto -\frac{400}{x^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{400}{x^2} \\ &= \frac{x^2}{x^2} - \frac{400}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 400}{x^2} \end{aligned}$$

2. Étudier le signe de $x^2 - 400$, pour tout x appartenant à l'intervalle $[5; 60]$.

Méthode 1 En factorisant : $x^2 - 400 = x^2 - 20^2 = (x - 20)(x + 20)$.

Donc :

x	5	20	60
$x - 20$	-	0	+
$x + 20$	+		+
$x^2 - 400 = (x - 20)(x + 20)$	-	0	+

Méthode 2 On remarque que $x^2 - 400$ est un trinôme du second degré, avec $a = 1$, $b = 0$ et $c = -400$. Son discriminant est $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times (-400) = 1600$. Il y a donc deux racines.

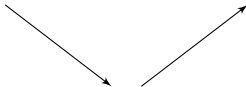
$$x_1 = \frac{-0 - \sqrt{1600}}{2 \times 1} = -20$$

$$x_2 = \frac{-0 + \sqrt{1600}}{2 \times 1} = 20$$

Le tableau de signes du trinôme est donc :

x	5	20	60
$x^2 - 400$	-	0	+

3. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[5; 60]$.

x	5	20	60
$x^2 - 400$	-	0	+
x^2	+		+
$f'(x) = \frac{x^2 - 400}{x^2}$	-	0	+
f			

4. Pour quel volume d'engrais fabriqué le coût moyen quotidien de production est-il minimal ? Quel est ce coût moyen minimal ?

Nous voyons dans le tableau de variations de la question précédente que le minimum est atteint pour $x = 20$. Donc le coût moyen quotidien de production est minimal pour 20 m^3 d'engrais vendus, et le coût moyen est alors $f(20) = 20 - 15 + \frac{400}{20} = 25$ centaines d'euros, soit 2 500 euros.

