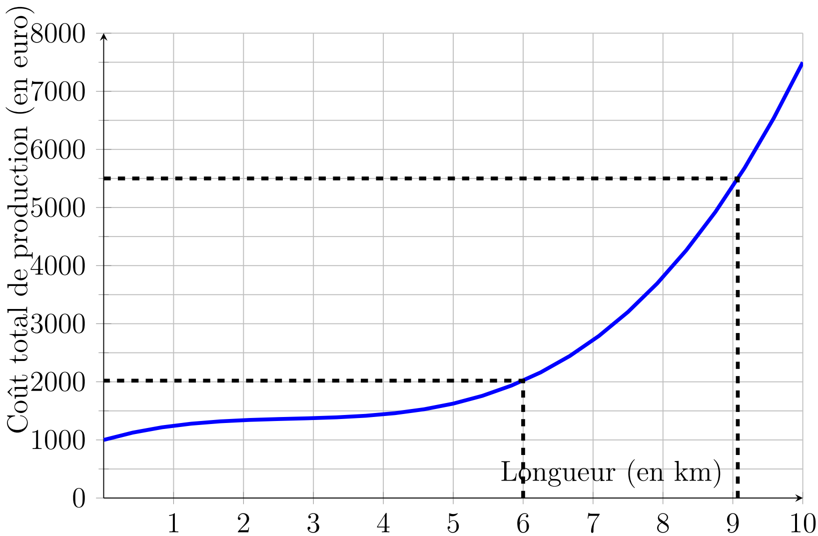
Dérivation de polynômes

Exercice 1. *Une entreprise produit et vend un tissu en coton de forme rectangulaire de 1 mètre de large ; on note x sa longueur exprimée en kilomètre, x étant un nombre compris entre 0 et 10.*
Le coût total de production en euro de ce tissu est donné, en fonction de x, par :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 350x + 1\,000.$$

La courbe de la fonction C est représentée sur le graphique ci-dessous.



Partie A : Étude du coût total

1. *Déterminer le montant des coûts fixes.*

   Les coûts fixes correspondent au coût de fabrication de zéro kilomètres de tissu, soit 1 000€.

2. (a) *Déterminer, par lecture graphique, le montant du coût total lorsque l'entreprise produit 6* km *de tissu.*

   Par lecture graphique, on trouve environ 2 000€.

(b) *Déterminer par un calcul sa valeur exacte.*

Le coût de production de 6 km de tissu est $C(x) = 15 \times 6^3 - 120 \times 6^2 + 350 \times 6 + 1000 = 2020$ €.

3. *Déterminer graphiquement la longueur, arrondie au kilomètre, de tissu produit lorsque le coût total s'élève à 5 500.*

   Graphiquement, on lit que cette longueur doit être environ 9 km.

Partie B : Étude du bénéfice

Le cours du marché offre un prix de 530 € le kilomètre de tissu fabriqué par l'entreprise.

Pour tout $x \in [0\ ;\ 10]$, on note $R(x)$ la recette et $B(x)$ le bénéfice générés par la production et la vente de x kilomètres de tissu par l'entreprise.

1. *Exprimer $R(x)$ en fonction de x.*

   Chaque kilomètre de tissu fabriqué est vendu 530€, donc $R(x) = 530x$.

2. *Montrer que pour tout $x \in [0; 10]$: $B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 1\,000$.*

   Le bénéfice est égal aux recettes moins les coûts, soit :

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 530x - \left(15x^3 - 120x^2 + 350x + 1000\right) \\ &= 530x - 15x^3 + 120x^2 - 350x - 1000 \\ &= -15x^3 + 120x^2 + 180x - 1000 \end{aligned}$$

3. *Déterminer $B'(x)$ pour $x \in [0\ ;\ 10]$ où B' désigne la fonction dérivée de B.*

   On a :

$$\begin{aligned} B(x) &= -15x^3 + 120x^2 + 180x - 1000 \\ B'(x) &= -15 \times 3x^2 + 120 \times 2x + 180 \\ &= -45x^2 + 240x + 180 \end{aligned}$$

4. *Étudier le signe de $B'(x)$ et en déduire les variations de la fonction B sur $[0\ ;\ 10]$.*

La fonction dérivée B' est un polynôme du second degré, avec $a = -45$, $b = 240$, $c = 180$. Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 240^2 - 4 \times (-45) \times 180 = 90000$.

Ce discriminant est positif, donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-240 - \sqrt{90000}}{2 \times (-45)} = 6$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-240 + \sqrt{90000}}{2 \times (-45)} = -2/3$$

x	-2/3		6		10
Signe de $B'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de B		$\nearrow$		$\searrow$	

5. (a) *Pour quelle longueur de tissu produit et vendu l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice maximal ?*

   Nous voyons sur le tableau de variations que le maximum de B est atteint pour $x = 6$. Il faut donc vendre 6 km de tissu pour que le bénéfice soit maximal.

   (b) *Donner alors la valeur de ce bénéfice maximal.*

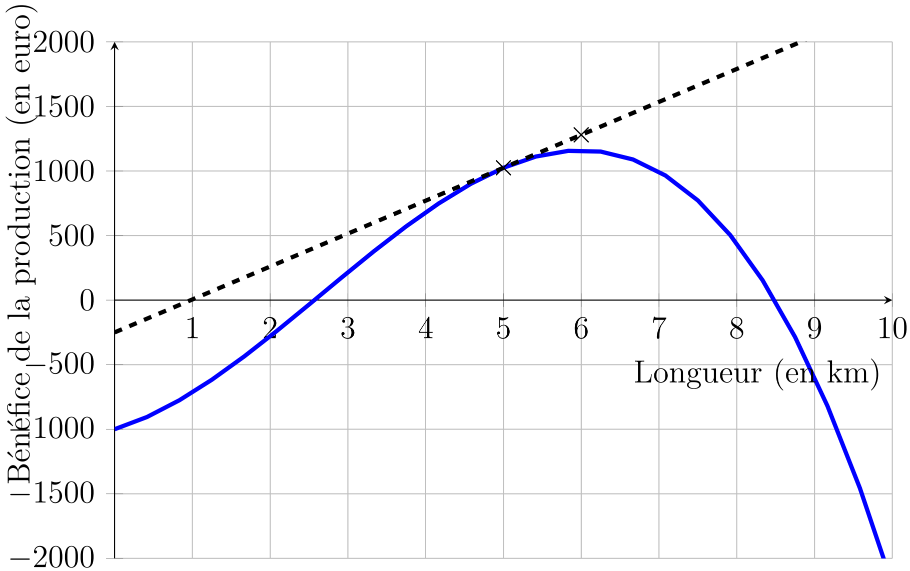
   Ce bénéfice est alors $B(6) = -15 \times 6^3 + 120 \times 6^2 + 180 \times 6 - 1000 = 1160$, soit 1160€.

6. (a) *Calculer le nombre dérivé de B en 5.*

   $B'(5) = -45 \times 5^2 + 240 \times 5 + 180 = 255$.

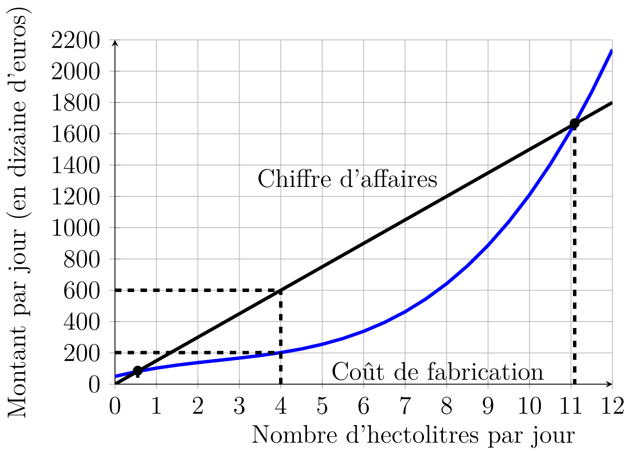
   (b) *Sur le graphique suivant, tracer la tangente à B au point d'abscisse 5 dans le repère.*

   On part du point de la courbe d'abscisses 5. À partir de ce point, on se déplace d'une unité vers la droite, et de 255 unités vers le haut (car $B'(5) = 255$). On trace la droite qui passe par ces deux points.



Bénéfice de la production (en euro)
2000
1500
1000
500
0
−500
−1000
−1500
−2000
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Longueur (en km)

Exercice 1. *Une entreprise fabrique et vend un produit désinfectant liquide. Chaque jour, elle fabrique x hectolitres de désinfectant avec x compris entre 0 et 12. On considère que l'entreprise vend toute sa production.*
Le coût de fabrication, en dizaine d'euros, de x hectolitres de ce produit est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 12]$.
Le chiffre d'affaires pour la vente de x hectolitres de produit est $R(x)$, exprimé en dizaines d'euros.
Dans un repère orthogonal du plan, on a tracé les représentations graphiques des fonctions C et R.



1. *On considère la production d'une journée. Par lecture graphique :*
   (a) *Déterminer le chiffre d'affaires réalisé pour la vente de 4 hectolitres.*

   Ce chiffre d'affaire est environ 600€.

   (b) *Déterminer le coût de fabrication de 4 hectolitres.*

   Ce chiffre d'affaire est environ 200€.

   (c) *En déduire le bénéfice réalisé pour la vente de 4 hectolitres.*

   Le bénéfice est environ $600 - 200 = 400$€.

   (d) *Ce bénéfice est-il maximal pour la production et la vente de 4 hectolitres ? Justifier.*

Ce bénéfice n'est pas maximal. En effet, le bénéfice correspond à la différence (en ordonnée) entre la droite et la courbe. Or pour une valeur de $x = 8$ par exemple, cette différence est plus grande, donc le bénéfice est plus grand.

2. *Par lecture graphique, donner sous forme d'intervalle, le nombre d'hectolitres que doit produire l'entreprise pour réaliser des profits, c'est-à-dire un bénéfice strictement positif.*

   Entre $x = 0,5$ et $x = 11$ (environ), la droite du chiffre d'affaires est au dessus de la courbe des coûts de fabrication, donc le bénéfice sera positif entre ces abscisses, c'est-à-dire pour $x \in]0,5; 11[$.

3. *La représentation graphique de la fonction R est une droite qui passe par l'origine du repère et par le point A de coordonnées* $(4\ ;\ 600)$. *Déterminer l'expression de $R(x)$.*

   Puisque la droite passe par l'origine, c'est une fonction linéaire d'équation $y = ax$, où a est le coefficient directeur. Ce coefficient est égal à $\frac{600}{4} = 150$, donc $R(x) = 150x$.

4. *On note B la fonction qui modélise le bénéfice de l'entreprise en fonction du nombre d'hectolitres de désinfectant vendus. Pour x appartenant à l'intervalle [0 ; 12] , on a :*

$$B(x) = -2x^3 + 15x^2 + 84x - 50.$$

   (a) *On note B' la fonction dérivée de la fonction B. Calculer $B'(x)$.*

   On a :

$$\begin{aligned} B(x) &= -2x^3 + 15x^2 + 84x - 50 \\ B'(x) &= -2 \times 3x^2 + 15 \times 2x + 84 \\ &= -6x^2 + 30x + 84 \end{aligned}$$

   (b) *Résoudre l'équation $-6x^2 + 30x + 84 = 0$.*

   C'est un trinôme du second degré, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 30^2 - 4 \times (-6) \times 84 = 2916$. Ce discriminant est positif, donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-30 - \sqrt{2916}}{2 \times (-6)} = 7$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-30+\sqrt{2916}}{2\times(-6)} = -2$$

(c) *Recopier et compléter le tableau de variations ci-dessous :*

Le trinôme est du signe de $a = -6$ (négatif) à l'extérieur des racines (c'est-à-dire avant -2, et après 7) et du signe opposé (positif) à l'intérieur. Donc le tableau est le suivant.

x	0		7		12
Signe de $B'(x)$		+	0	-	
Variations de B		$\nearrow$		$\searrow$	

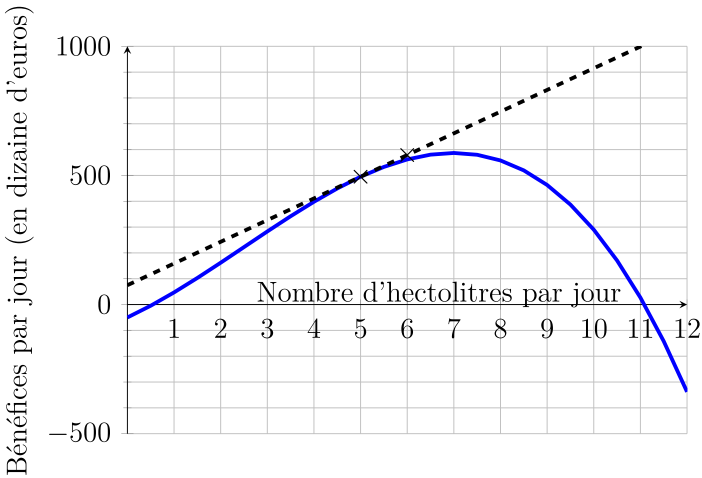
(d) *Pour quelle quantité de désinfectant produite et vendue le bénéfice est-il maximal ? Quel est alors le bénéfice ?*

D'après le tableau de variations, le maximum de B est atteint pour $x = 7$, et on a $B(7) = -2\times 7^3 + 15\times 7^2 + 84\times 7 - 50 = 587$. Donc le bénéfice maximal est atteint pour 7 hectolitres de désinfectant produite et vendue, et le bénéfice est alors 587 dizaines d'euros, soit 5 870 €.

5. (a) *Calculer le nombre dérivé de B en 5.*

Le nombre dérivé de B en 5 est $B'(5) = -6\times 5^2 + 30\times 5 + 84 = 84$.

(b) *Sur le graphique suivant, tracer la tangente à B au point d'abscisse 5 dans le repère.* On part du point de la courbe d'abscisses 5. À partir de ce point, on se déplace d'une unité vers la droite, et de 84 unités vers le haut (car $B'(5) = 84$). On trace la droite qui passe par ces deux points.



Bénéfices par jour (en dizaine d'euros)
1000
500
0
−500
Nombre d'hectolitres par jour
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12