

Exercice 1 (D'après le bac STMG Métropole, 15 juin 2016).

Une agence lance une campagne publicitaire sur une durée de 15 semaines, dans une ville donnée, afin de promouvoir une nouvelle marque de boissons gazeuses.

Une étude montre qu'après x semaines de campagne publicitaire, le pourcentage de personnes résidant dans cette ville ayant pris connaissance de la marque est donné par l'expression : $f(x) = \frac{75x}{x+2}$ où x est un réel compris entre 0 et 15.

L'objectif fixé à l'agence par l'entreprise qui produit cette nouvelles marque de boissons est qu'au moins 70 % des habitants de la ville aient pris connaissance de cette marque.

1. On note f' la dérivée de f . Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 15]$, on a : $f'(x) = \frac{150}{(x+2)^2}$.

Pour tout $x \in [0 ; 15]$, on a $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 75x$ et $v(x) = x + 2$.

On doit donc calculer $u'(x) = 75$ et $v'(x) = 1$.

Finalement :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{75(x+2) - 1 \times 75x}{(x+2)^2} \\ &= \frac{75x + 150 - 75x}{(x+2)^2} \\ &= \frac{150}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

2. En utilisant le signe de sa dérivée, déterminer les variations de f sur l'intervalle $[0 ; 15]$.

Le numérateur et le dénominateur de $f'(x)$ sont positifs pour tout $x \in [0 ; 15]$. On en déduit que f' est positive et, par suite, la fonction f est croissante sur son ensemble de définition.

De plus, on a $f(0) = \frac{75 \times 0}{0+2} = 0$ et $f(15) = \frac{75 \times 15}{15+2} \approx 66$, donc :

x	0	15
$f'(x)$	+	
f	0	66

3. *Au bout de combien de semaines est-ce que le maximum d'habitants de la ville aura pris connaissance de la marque ?*

On lit sur le tableau de variations que le maximum est atteint pour $x = 15$, c'est-à-dire au bout de 15 semaines.

4. *Quel pourcentage d'habitants connaîtra alors la marque ? L'objectif de la marque est-il atteint ?* On a $f(15) = 66$, donc 66% d'habitants connaîtra alors la marque. L'objectif, qui était de 70%, n'est donc pas atteint.

5. *L'agence décide de prolonger la campagne publicitaire. Trente semaines après le début de la campagne, l'objectif de 70 % est-il enfin atteint ?* On a $f(30) = \frac{75 \times 30}{30+2} \approx 70,3$, donc l'objectif sera atteint au bout de trente semaines.

6. *Combien de semaines après le début de la campagne (à une semaine près) la moitié de la population connaissait-elle la marque ?* Différentes stratégies peuvent être employées pour répondre à cette question.

Méthode 1 On calcule différente valeur de $f(x)$, pour différentes valeurs de x comprises entre 0 et 15. On finit par remarquer que $f(4) = 50$. Donc au bout de quatre semaines, la moitié (50%) de la population connaissait la marque.

Méthode 2 On résout l'équation $f(x) = 50$, c'est-à-dire $\frac{75x}{x+2} = 50$. C'est plus technique, mais cela fonctionne aussi.