

Exercice 1 (D'après le bac STMG Métropole, 11 septembre 2014).

Partie A. On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[6; 24]$ par : $f(x) = -x + 40 - \frac{144}{x}$. On note f' la fonction dérivée de f .

1. Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[6; 24]$, on a : $f'(x) = \frac{144-x^2}{x^2}$. Déterminons $f'(x)$. $f'(x) = -1 - 144 \left(\frac{-1}{x^2} \right) = \frac{-x^2 + 144}{x^2}$.

Par conséquent pour tout x de l'intervalle $[6; 24]$, nous avons bien :

$$f'(x) = \frac{144 - x^2}{x^2}.$$

2. (a) Montrer que le tableau de signes de f' sur l'intervalle $[6; 24]$ est :

x	6	12	24
$f'(x)$	+	0	-

Étudions le signe de $-x^2 + 144$: c'est un trinôme du second degré, donc $\Delta = 0^2 - 4 \times (-1) \times 144 = 576$. Donc il y a deux racines $x_1 = \frac{-0 - \sqrt{576}}{2 \times (-1)} = 12$ et $x_2 = \frac{-0 + \sqrt{576}}{2 \times (-1)} = -12$. Donc f' est positive entre -12 et 12 (c'est-à-dire entre 6 et 12 , en restreignant l'ensemble de définition à l'intervalle $[6; 24]$) et négative ailleurs. Cela correspond bien au tableau de signe de l'énoncé.

- (b) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[6; 24]$. On a $f(6) = -6 + 40 - \frac{144}{6} = 10$, $f(12) = -12 + 40 - \frac{144}{12} = 16$, $f(24) = -24 + 40 - \frac{144}{24} = 10$, donc :

x	6	12	24
$f'(x)$	+	0	-
f	10	16	10

- (c) Quelle est la plus petite valeur prise par f sur l'intervalle $[6; 24]$?
On lit sur le tableau de variations que cette valeur est 10 (atteinte à la fois pour $x = 6$ et $x = 24$).

Partie B. Une entreprise produit et commercialise entre 6 et 24 tonnes d'engrais par jour.

On admet que toute sa production est vendue.

Le bénéfice total (exprimé en centaines d'euros) réalisé pour une production de x tonnes d'engrais, est modélisé à l'aide de la fonction B définie par :
 $B(x) = -x^2 + 40x - 144$.

On admet que le bénéfice total maximal est atteint pour une production de 20 tonnes d'engrais par jour.

1. Le bénéfice unitaire pour une production de x tonnes d'engrais est donné par $\frac{B(x)}{x}$.

Le bénéfice total et le bénéfice unitaire sont-ils maximaux pour la même production d'engrais ? On pourra utiliser les résultats obtenus dans la partie A. On remarque que $\frac{B(x)}{x} = \frac{-x^2+40x-144}{x} = \frac{-x^2}{x} + \frac{40x}{x} - \frac{144}{x} = -x + 40 - \frac{144}{x} = f(x)$. Donc le maximum de la fonction $x \mapsto \frac{B(x)}{x}$ est atteint pour le même x que le maximum de la fonction f étudiée dans la partie A, c'est-à-dire 12. Donc ce maximum n'est pas atteint pour la même production d'engrais que le bénéfice total (dont le maximum est atteint pour 20 tonnes d'engrais produites).

2. Actuellement, l'entreprise fabrique 21 tonnes d'engrais par jours. Elle a la possibilité d'en fabriquer deux de plus par jour. Si on ne tient compte que du bénéfice total, l'entreprise a-t-elle intérêt à augmenter sa production ? On a :

- $B(21) = -21^2 + 40 \times 21 - 144 = 255$
- $B(23) = -23^2 + 40 \times 23 - 144 = 247$

Donc le bénéfice est moins élevé pour 23 tonnes produites que pour 21 tonnes : l'entreprise n'a pas intérêt à produire davantage.