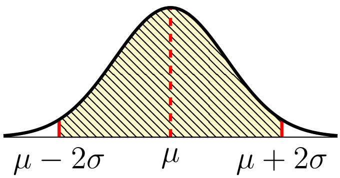
3 Loi normale

Dans votre cours, recopiez le titre de cette partie (« 3 — Loi normale ») ainsi que le contenu : la propriété, la définition, et l'exemple qui suivent.
On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.

Propriété. La probabilité que X soit comprise entre $\mu - 2\sigma$ et $\mu + 2\sigma$ est supérieure à 95 %. En d'autres termes :

$$P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) > 0,95$$

Définition. L'intervalle $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$ est appelé *intervalle de fluctuation* de la variable X à 95 %.



Exemple. Nadia conçoit des jeux vidéos. Elle a programmé une potion de soin pour que celle-ci redonne un nombre de point de vie suivant une loi normale d'espérance 30 et d'écart-type 4. Marwane teste ce jeu : il boit une potion de soin. Combien de points de vie peut-il espérer gagner ?
Puisque le nombre de points de vie gagnés suit une loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart-type $\sigma = 4$, son intervalle de fluctuation à 95% est :

$$[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma] = [30 - 2 \times 4; 30 + 2 \times 4] = [22; 38]$$

Donc le personnage de Marwane va gagner entre 22 et 38 points de vie avec une probabilité de plus de 95% (donc il y a moins de 5% de chances qu'il gagne moins de 22 ou plus de 38 points de vie).

Remarque. La notion d'*intervalle de confiance* n'est pas utilisée avec la loi normale en terminale STMG.

Exercices

Essayez de faire les exercices sans regarder la solution, puis comparez vos résultats au corrigé (à la fin de ce document). Si des questions persistent, n'hésitez pas à me demander par courriel ou par l'ENT.

Exercice 1 (Centres étrangers, 11 juin 2015)**.** Un laboratoire pharmaceutique fabrique des gélules contenant une substance S. La masse de substance S, exprimée en milligrammes (mg), contenue dans une gélule est modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $8,2$ et d'écart type $0,05$.
La norme de fabrication impose que la masse de substance S dans une gélule soit comprise entre 8,1 mg et 8,3 mg. La probabilité qu'une gélule soit hors norme après la fabrication est :
a. 0,2 **b.** 0,05 **c.** 0,8 **d.** 0,95

Exercice 2 (Métropole La Réunion, 16 juin 2016)**.** Un test d'aptitude est évalué sur 100 points. Il faut obtenir au moins 60 points pour le réussir.
Le score d'un candidat est modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance $\mu = 66$ et d'écart type σ inconnu.
La probabilité, pour un candidat pris au hasard, d'obtenir un score compris entre 60 et 72 points est égale à $0,95$.
Parmi les valeurs ci-dessous, la plus proche de σ est :
a. 3 **b.** 6 **c.** 5 **d.** 9

Corrigé

Exercice 3 (Centres étrangers, 11 juin 2015)**.** On remarque que puisque la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 8,2$ et d'écart-type $\sigma = 0,05$, l'intervalle $[8,1; 8,3] = [8,2 - 2 \times 0,05; 8,2 + 2 \times 2,5] = [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$ est l'intervalle à 95% de la variable aléatoire.
Donc la probabilité que la gélule soit à l'intérieur de cette norme est supérieure à 95%, et la probabilité qu'elle soit à l'extérieur de cette norme est inférieure à 0,05% (réponse **d.**).

Exercice 4 (Métropole La Réunion, 16 juin 2016)**.** Puisque la probabilité d'obtenir un score compris entre 60 et 72 points est égale à 0,95, l'intervalle $[60; 72]$, centré sur l'espérance $\mu = 66$ est l'intervalle de fluctuation à 95% de cette variable aléatoire. Donc $[60; 72] = [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$ et :

$$\begin{aligned} 72 &= \mu + 2\sigma \\ 72 &= 66 + 2\sigma \\ 72 - 66 &= 2\sigma \\ 6 &= 2\sigma \\ 3 &= \sigma \end{aligned}$$

L'écart-type σ est donc environ égal à 3 (réponse **a**).