Si ce n'est pas encore fait, commencez par faire l'activité d'introduction du fichier `TSTMG-7LoisProba-Cours2-intro.pdf`.

2 Loi Normale

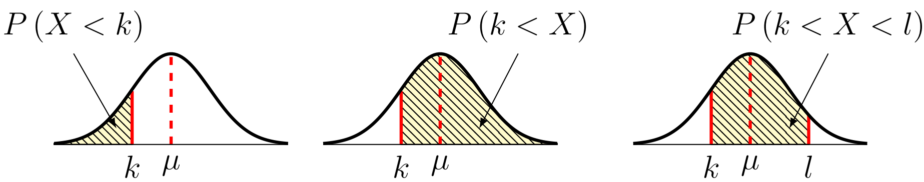
Une variable aléatoire de loi binomiale n et p, lorsque n est assez grand et que $n \times p$ est supérieur à 5, peut être modélisée par une *loi normale* de même espérance et écart-type.

Définition (Rappels)**.** Étant donné une variable aléatoire X :

- son espérance est la moyenne des valeurs qu'elle peut prendre ;
- son écart-type mesure la dispersion des valeurs qu'elle peu prendre (plus il est petit, plus ses valeurs sont proches de son espérance ; plus il est grand, plus ses valeurs peuvent être éloignées de son espérance).

Propriété. La courbe de densité d'une variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance μ (« mu ») et d'écart-type σ (« sigma ») est la courbe en cloche.

- Elle est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \mu$.
- Pour des réels k et l, les probabilités $P(X < k)$, $P(X > k)$ et $P(k < X < l)$ peuvent se lire (en théorie) en mesurant l'aire sous la courbe.

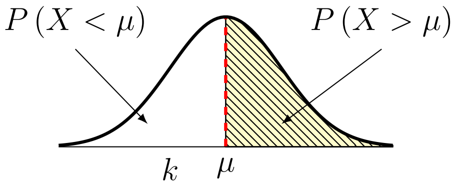


Propriété. Pour tout réel k, on a :

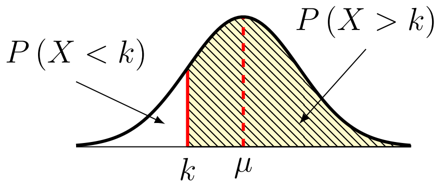
$P(X = k) = 0 \qquad P(X < k) = P(X \leqslant k) \qquad P(X > k) = P(X \geqslant k)$

En d'autres termes : la probablitié d'obtenir exactement *une certaine valeur est nulle.*

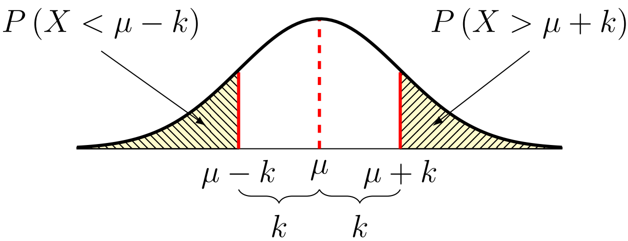
Propriété.



$P(X<\mu)=P(X>\mu)=0,5$



$P(X<k)=1-P(X>k)$



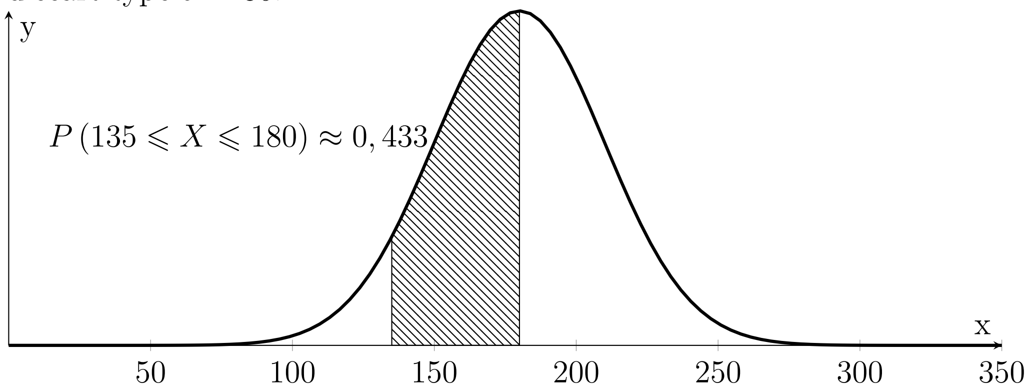
$P(X<\mu-k)=P(X>\mu+k)$

Exercice (D'après le sujet de bac Nouvelle Calédonie, 16 novembre 2016)**.** Un producteur vend des yaourts chaque samedi sur un marché. On note X la variable aléatoire, qui, à chaque semaine, associe le nombre de yaourts vendus au marché. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 180$ et d'écart type $\sigma = 30$.

1. *Calculer sans l'aide de la calculatrice, la probabilité arrondie au millième que le nombre de yaourts vendus soit inférieur ou égal à 180.*

   Puisque 180 est l'espérance de la loi normble, on a $P(X < 180) = 0,5$: la probabilité que le nombre de yaourts vendus soit inférieur ou égal à 180 est 0,5 (soit une chance sur deux).

On donne la courbe de densité de la loi normale d'espérance $\mu = 180$ et d'écart type $\sigma = 30$.



2. *Sur ce graphique, on peut lire : $P(135 \leqslant X \leqslant 180) \approx 0,433$. Interpréter ce résultat.*

   La probabilité que le nombre de yaourts vendus soit comprise entre 135 et 180 est égale à 0,433 (soit environ 43,3%).

3. *En déduire $P(180 \leqslant X \leqslant 225)$ et $P(X \geqslant 225)$.*

   On remarque que $180 - 135 = 45$, et $225 - 180 = 45$. Donc les intervalles $[135; 180]$ et $[180; 225]$ sont symétriques par rapport à 180. Puisque l'espérance de la loi normale est 180, alors la courbe est elle aussi symétrique par rapport à 180, et les probabilités correspondantes sont égales :

$$P(180 \leqslant X \leqslant 225) = P(135 \leqslant X \leqslant 180) = 0,433$$

De plus, on remarque que $P(X \geqslant 225) = P(X \leqslant 135)$ (pour les mêmes raisons de symétrie). Donc :

$$\begin{aligned}
P(X \leqslant 135) + P(135 \leqslant X \leqslant 180) + \\
P(180 \leqslant X \leqslant 225) + P(X \geqslant 225) &= 1 \\
P(X \geqslant 225) + 0,433 + 0,433 + P(X \geqslant 225) &= 1 \\
2P(X \geqslant 225) &= 1 - 0,433 - 0,433 \\
2P(X \geqslant 225) &= 0,134 \\
P(X \geqslant 225) &= \frac{0,134}{2} \\
P(X \geqslant 225) &= 0,067
\end{aligned}$$

4. *Ce samedi, le producteur n'a apporté que 225 yaourts au marché. Quelle est la probabilité qu'il ait besoin de compléter son stock ?.*
   On a montré que $P(X \geqslant 225) = 0,067$: la probabilité que le nombre de yaourts vendus soit supérieur à 225 (et donc qu'il ait besoin de compléter son stock) est égale à 0,067 (soit 6,7% environ).