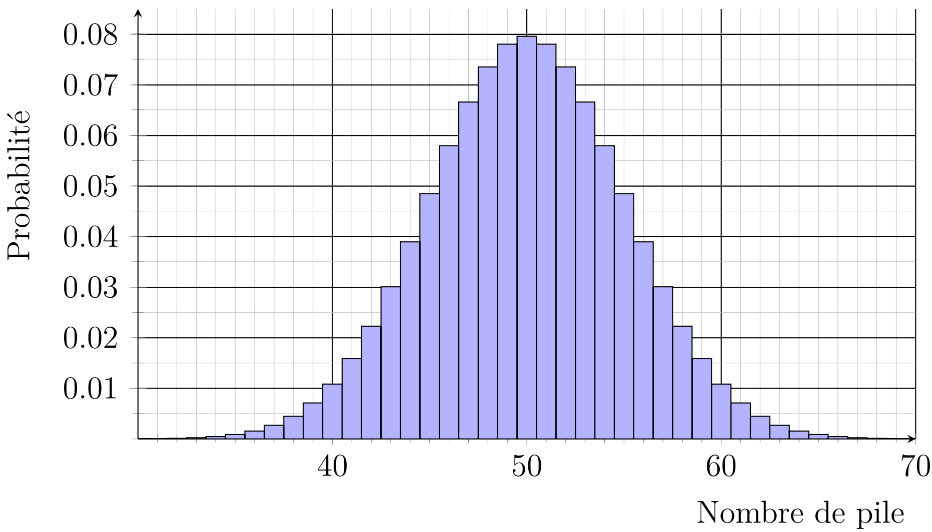
Introduction à la loi normale

Cette partie a pour but de vous faire travailler sur la symétrie *de la loi normale.*
Il n'y a rien à écrire dans votre cahier de cours : prenez une feuille de brouilon et un crayon, et essayer de faire et comprendre cette activité.
On lance 100 fois une pièce, et on obtient 37 fois pile. On se demande si cette pièce est truquée ou non.
On imagine maintenant qu'on lance une *autre* pièce, équilibrée, 100 fois de suite, et qu'on compte le nombre de pile obtenus (que l'on associe à la variable aléatoire X). Les probabilités sont résumées dans le graphique suivant (les probabilits pour $X < 30$ et $X > 70$ ne sont pas affichée car elles sont si proches de 0 que l'on peut les considérer comme nulles).



Le graphique se lit de la manière suivante. Par exemple, puisque la barre d'abscisse 50 monte jusqu'à 0,08, alors $P(X = 50) = 0,08$

(en d'autres termes, la probabilité d'obtenir exactement 50 pile est de 0,08, soit 8% environ).

Les réponses à cette question se trouvent à la page 2. Essayez de répondre aux questions avant de regarder les solutions.

1. Lire graphiquement $P(X = 40)$. En déduire la probabilité d'obtenir exactement 40 fois pile.
2. Comment pourrait-on faire pour lire graphiquement la probabilité $P(51 \leqslant X \leqslant 60)$, c'est-à-dire la probabilité d'obtenir entre 51 et 60 fois pile ? Ne pas faire le calcul : donner seulement la méthode.

On admet que $P(51 \leqslant X \leqslant 60) = 0,442$.

3. Graphiquement, comparer $P(51 \leqslant X \leqslant 60)$ et $P(40 \leqslant X \leqslant 49)$. En déduire $P(40 \leqslant X \leqslant 49)$.
4. Calculer $P(40 \leqslant X \leqslant 60)$.
5. *Sans les calculer,* comparer (graphiqement, si nécessaire) $P(X < 40)$ et $P(X > 60)$.
6. En déduire $P(X < 40)$, et reformuler cette probabilité en utilisant une phrase en français.
7. Que peut-on affirmer à propos de la pièce qui n'a produit que 37 fois pile en 100 lancers ?

Solutions

1. On lit $P(X = 40) \approx 0,011$. Donc la probabilité d'obtenir exactement 40 fois pile est d'environ 0,011 (soit 1,1%).
2. On pourrait additionner les probabilités de tous les nombres

entre 51 et 60 :

$$\begin{aligned}P(51 \leqslant X \leqslant 60) &= P(X=51)+P(X=52)+P(X=53)\\&+P(X=54)+P(X=55)+P(X=56)\\&+P(X=57)+P(X=58)+P(X=59)\\&+P(X=60)\end{aligned}$$

3. On remarque que la courbe est symétrique par rapport à l'abscisse 50, et donc que $P(51 \leqslant X \leqslant 60) = P(40 \leqslant X \leqslant 49)$. Donc puisque $P\left(51 \leqslant X \leqslant 60\right) = 0,442$, alors $P\left(40 \leqslant X \leqslant 49\right) = 0,442$.
4. On « découpe » la probabilité recherchée en trois « morceaux » : entre 40 et 49, exactement 50, puis entre 51 et 60 :

$$\begin{aligned}&P(40 \leqslant X \leqslant 60)\\&= P(40 \leqslant X \leqslant 49) + P(X=50) + P(51 \leqslant X \leqslant 60) \quad P(40 \leqslant X \leqslant\\&= P(40 \leqslant X \leqslant 49) + P(X=50) + P(51 \leqslant X \leqslant 60)\\&= 0,442 + 0,08 + 0,442\\&= 0,964\end{aligned}$$

Donc la probabilité d'obtenir entre 40 et 60 fois pile est égale à 0,964 (soit 96,4% environ).
5. Encore une fois, puisque la courbe est symétrique, on observe que $P(X < 40) = P(X > 60)$ (en d'autres termes, il est aussi probable d'obtenir moins de 40 fois pile que plus de 60 fois pile).
6. Sur 100 lancers, le nombre de pile obtenus est compris entre

0 et 100.

$$\begin{aligned}
P(0 \leqslant X \leqslant 100) &= 1 \\
P(X < 40) + P(40 \leqslant X \leqslant 60) + P(X > 60) &= 1 \\
P(X < 40) + 0,964 + P(X > 60) &= 1 \\
P(X < 40) + 0,964 + P(X < 40) &= 1 \\
2P(X < 40) + 0,964 &= 1 \\
2P(X < 40) &= 1 - 0,964 \\
2P(X < 40) &= 0,036 \\
P(X < 40) &= \frac{0,036}{2} \\
P(X < 40) &= 0,0168
\end{aligned}$$

Donc $P(X < 40) = 0,0168$, soit environ 1,7%. La probabilité d'obtenir moins de 40 fois pile est d'environ 1,7%.

7. Puisque que la probabilité d'obtenir moins de 40 fois pile est d'environ 1,7%, et que j'ai obtenu, avec ma pièce, 37 fois seulement pile, je peux affirmer (avec une petite probabilité de me tromper) que ma pièce est truquée.