

2 Suites arithmétiques

Définition 1. Une suite u est dite *arithmétique* s'il existe un réel r , appelé **raison**, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $u_{n+1} = u_n + r$.

Habituellement, une suite arithmétique est définie par la donnée de **son premier terme et sa raison**.

Propriété 2.

- Pour tout n et p de son domaine de définition, on a : $u_n = u_p + (n - p)r$.
- En particulier, si u est définie sur \mathbb{N} , pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 + nr$.

Propriété 3. La suite u est :

- (strictement) croissante si et seulement si **sa raison est (strictement) positive** ;
- (strictement) décroissante si et seulement si **sa raison est (strictement) négative** ;
- constante si **sa raison est nulle**.

Exercice 1. Cette année, les ventes d'un revendeur d'ordinateur ont diminué. Mais il s'était engagé avec son fournisseur, et il continue à recevoir chaque semaine 15 ordinateurs de plus qu'il n'en vend. Il loue un local pour stocker ces ordinateurs.

On appelle (u_n) la suite modélisant le nombre d'ordinateurs stockés dans le local au bout de n semaines. Ainsi, $u_1 = 0$ est le nombre d'ordinateurs stockés au début de la première semaine ; u_2 est le nombre d'ordinateurs stockés au début de la deuxième semaine, et ainsi de suite.

1. Justifier que la suite u est arithmétique, et donner son premier terme et sa raison.
2. Calculer u_2, u_3, u_4 .
3. Combien d'ordinateurs seront stockés au bout de 10 semaines ?
4. Au bout de combien de temps son local, qui permet de stocker 230 ordinateurs, sera-t-il plein ?

Exercice 1 (Corrigé). 1. Chaque semaine, le stock augmente de 15 ordinateurs, donc chaque terme de la suite (dont les termes correspondent au stock chaque semaine) est égal au précédent auquel on ajoute 15 : c'est une suite arithmétique de raison 15. Son premier terme est $u_1 = 0$ (d'après l'énoncé).
2. C'est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 0$ et de raison 15, donc :

$$\begin{aligned}u_1 &= 0 \\u_2 &= u_1 + 15 = 0 + 15 = 15 \\u_3 &= u_2 + 15 = 15 + 15 = 30 \\u_4 &= u_3 + 15 = 30 + 15 = 45\end{aligned}$$

3. Au bout de dix semaines, le nombre d'ordinateurs stockés est égal à u_{10} . Calculons ce nombre.

$$\begin{aligned}u_{10} &= u_1 + (n - 1) \times r \\&= 0 + (10 - 1) \times 15 \\&= 135\end{aligned}$$

Il y aura donc 135 ordinateurs.

4. Le local sera plein lorsque le nombre d'ordinateur dépassera la capacité du local, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}u_n &\geq 230 \\u_1 + (n - 1) \times r &\geq 230 \\0 + (n - 1) \times 15 &\geq 230 \\15n - 15 &\geq 230 \\15n &\geq 230 + 15 \\15n &\geq 245 \\n &\geq \frac{245}{15} \\n &\geq 16,3 \text{ environ}\end{aligned}$$

Le local sera donc plein entre la 16^e et la 17^e semaine.