2 Suite géométrique

- *Recopiez dans votre cours la définition, les trois propriétés, les trois exemples. Les parties des exemples* $\boxed{\textit{encadrées}}$ *sont des explications supplémentaires que vous n'êtes pas obligé·e·s de recopier.*
- *Si vous ne comprenez pas, ne paniquez pas, et avancez un peu plus loin dans la fiche : il y a des liens vers des vidéos qui expliquent ce cours.*

Définition. Une suite v est dite *géométrique* s'il existe un réel q non nul, appelé raison, tel que pour tout n de son domaine de définition on ait : $v_{n+1} = q \times v_n$.

Exemple 1 (Définition)**.**

(a) Les cinq premiers termes de la suite géométrique de premier terme 4 et de raison $\frac{1}{2}$ sont : 4 ; 2 ; 1 ; 0,5 ; 0,25.

> En effet :
>
> - le premier terme est 4 ;
> - le second terme est $\frac{1}{2} \times 4 = 2$;
> - le second terme est $\frac{1}{2} \times 2 = 1$;
> - le second terme est $\frac{1}{2} \times 1 = 0,5$;
> - le second terme est $\frac{1}{2} \times 0,5 = 0,25$.

(b) La suite de termes $1/3$; 1 ; 3 ; 9 ; 27 ; etc. est géométrique de premier terme $1/3$ et de raison 3.

> En effet, pour passer de $1/3$ à 1, on a multiplié par 3 ; pour passer de 1 à 3, on a multiplié par 3 ; pour passer de 3 à 9, on a multiplié par 3 ; pour passer de 9 à 27, on a multiplié par 3 ; etc.

Propriété (Terme général)**.**

- Pour tout p et n de son domaine de définition, on a : $v_n = v_p \times q^{n-p}$.

— En particulier, si v est définie sur $\mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = v_0 \times q^n$.

Une vidéo pour vous aider à comprendre cette propriété : ***http://youtu.be/WTmdtbQpa0c***

Exemple 2 (Terme général)**.**

1. *Soit u la suite géométrique de premier terme $u_7 = 12$ et de raison $0,85$. Calculer u_{10} et u_{20}.*
2. *Soit v la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ par :*

$$\begin{cases} v_0 & = & 1729 \\ v_{n+1} & = & 1,02v_n \quad \textit{pour tout } n \geqslant 0 \end{cases}$$

Calculer v_{10} et v_{100}.

1. On applique la formule $u_n = u_p \times q^{n-p}$, où :

   le premir terme est u_7, donc $p = 7$;

   la raison est $0,85$;

   le terme recherché est u_{10}, donc $n = 10$.

   Cela donne :

$$\begin{aligned} u_{10} &= u_7 \times 0,85^{10-7} \\ &= 12 \times 0,85^3 \\ &= 7,3695 \end{aligned}$$

   De même, pour u_{20}, on applique la même formule avec $n = 20$:

$$\begin{aligned} u_{20} &= u_7 \times 0,85^{20-7} \\ &= 12 \times 0,85^13 \\ &\approx 1,45 \end{aligned}$$

2. On reconnait une suite géométrique de premier terme $v_0 = 1729$ et de raison $1,02$. Puisque l'indice du premier terme est 0, on peut appliquer le cas particulier $v_n = v_0 \times q^n$, avec $q = 1,02$. Donc :

$$\begin{aligned} v_{10} &= v_0 \times 1,02^{10} \\ &= 1729 \times 1,02^{10} \\ &\approx 2107,64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{100} &= v_0 \times 1,02^{100} \\ &= 1729 \times 1,02^{100} \\ &\approx 12525,99 \end{aligned}$$

Propriété (Variations)**.** Soit une suite géométrique de premier terme $v_0 > 0$ et de raison $q > 0$. Alors :

- si $0 < q < 1$: v est décroissante ;
- si $q = 1$: v est constante ;
- si $q > 1$: v est croissante.

Exemple 3 (Variations)**.** *Donner le sens de variations des suites de l'exemple précédent.*

1. La première suite a pour coefficient directeur $0,85$, qui est strictement inférieur à 1 : elle est strictement décroissante.
2. La deuxième suite a pour coefficient directeur $1,02$, qui est strictement supérieur à 1 : elle est strictement croissante.

Exercice corrigé

Dans la partie exercice de votre cahier, faites cet exercice. Essayez de le faire sans regarder la correction, puis regardez-la pour vous aider si vous bloquez.

Exercice 1 (D'après le sujet de bac STMG Nouvelle Calédonie — 16 novembre 2016)**.**
En janvier 2015, une entreprise renouvelle son parc de tablettes tactiles.
La tablette choisie affiche une autonomie de 8 heures. Une étude montre que l'autonomie de la batterie baisse de 15 % chaque année d'utilisation.
Soit n un entier naturel. On modélise le nombre d'heures d'autonomie de cette tablette pour l'année $2015 + n$ par une suite (u_n). Ainsi $u_0 = 8$.
On arrondira les résultats au centième d'heure.

1. (a) Vérifier que $u_1 = 6,8$.
   (b) Calculer u_2 et en donner une interprétation.
2. Expliquer pourquoi la suite (u_n) est géométrique. En donner sa raison.
3. Selon ce modèle, quelle sera l'autonomie de la tablette en janvier 2020 ?
4. L'entreprise souhaite prévoir le nombre d'années au bout desquelles l'autonomie sera inférieure à quatre heures.
   On considère l'algorithme suivant :

Initialisation	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 8
	q prend la valeur 0,85
Traitement	Tant que $u > 4$
	n prend la valeur $n + 1$
	u prend la valeur $8 \times q$
	Fin tant que
Sortie	Afficher n

   Quelle sera la valeur affichée en sortie ?

Exercice 2 (Corrigé). *En janvier 2015, une entreprise renouvelle son parc de tablettes tactiles.*
La tablette choisie affiche une autonomie de 8 heures. Une étude montre que l'autonomie de la batterie baisse de 15 % chaque année d'utilisation.
Soit n un entier naturel. On modélise le nombre d'heures d'autonomie de cette tablette pour l'année $2015 + n$ *par une suite* (u_n). *Ainsi* $u_0 = 8$.
On arrondira les résultats au centième d'heure.

1. (a) *Vérifier que* $u_1 = 6,8$.

   Le nombre u_1 correspond à l'autonomie de la batterie l'année $2015 + 1$, soit en 2016. L'autonomie initiale est de 8h, et l'autonomie baisse de 15% chaque année, soit un coefficient multiplicateur de $1 - \frac{15}{100} = 0,85$. Donc $u_1 = 0,85 \times 8 = 6,8$.

   (b) *Calculer* u_2 *et en donner une interprétation.* De même, $u_2 = 0,85 \times u_1 = 0,85 \times 6,8 = 5,78$. En 2017, la batterie aura une autonomie de 5,78 heures.

2. *Expliquer pourquoi la suite* (u_n) *est géométrique. En donner sa raison.*

   Chaque année, l'autonomie de la batterie baisse de 15%. Donc chaque terme de la suite est égal au précédent multiplié par le coefficient multiplicateur 0,85 : $u_{n+1} = 0,85u_n$. On reconnait une suite géométrique de raison 0,85.

3. *Selon ce modèle, quelle sera l'autonomie de la tablette en janvier 2020 ?* Janvier 2020 correspond à $2015 + 5$, donc $n = 5$. Calculons u_5. Nous appliquons la formule $u_n = u_0 \times q^n$ avec $q = 0,85$ et $n = 5$, donc :

   $$u_5 = 8 \times 0,85^5 \approx 3,55$$

   L'autonomie de la batterie en 2020 devrait être de 3,55 heures.

4. *L'entreprise souhaite prévoir le nombre d'années au bout desquelles l'autonomie sera inférieure à quatre heures.*

   On considère l'algorithme suivant :

Initialisation	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 8
	q prend la valeur 0,85
Traitement	Tant que $u > 4$
	n prend la valeur $n + 1$
	u prend la valeur $8 \times q$
	Fin tant que
Sortie	Afficher n

Quelle sera la valeur affichée en sortie ?

	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{u > 4}$
Avant la boucle	0	8	0,85	Vrai
1re itération	1	6,8	0,85	Vrai
2e itération	2	5,78	0,85	Vrai
3e itération	3	4,91	0,85	Vrai
4e itération	4	4,18	0,85	Vrai
5e itération	5	3,55	0,85	Faux

La valeur affichée en sortie sera la valeur de n, c'est-à-dire $n = 5$.

Bilan

Faire l'évaluation `bac-geometrique.pdf`, et me la rendre sur l'ENT ou par courriel.