2 Fonction rationnelle

Définition. Une *fonction rationnelle* est une fraction de polynômes.

Exemple. La fonction f définie sur $]-\infty; -5] \cup [5; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x - 5}$ est une fonction rationnelle.

Propriété. Soient u et v deux fonctions, définies et dérivables sur un intervalle I, et u' et v' leurs dérivées. Alors la dérivée de la fonction f définie par $f = \dfrac{u}{v}$ est :

$$f' = \frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$$

Exercice 5 (Calcul détaillé d'une dérivée)**.** On considère la fonction définie sur $[0; 50]$ par $f(x) = \dfrac{25x}{x+3}$. Montrer que l'expression de la dérivée de f est : $f'(x) = \dfrac{75}{(x+3)^2}$.

1. Identifier les fonctions u et v telles que $f = \frac{u}{v}$.
2. Calculer les dérivées u' et v' des fonctions u et v.
3. Appliquer la propriété précédente pour calculer l'expression de $f'(x)$, puis simplifier l'expression (*sans développer le dénominateur*).

Propriété. Soit f une fonction rationnelle (de la forme $\frac{u}{v}$).

— Le dénominateur de la dérivée de f est un carré, c'est-à-dire que $f'(x)$ est de la forme $\dfrac{blabla}{(blabla)^2}$.

— Puisqu'un carré est toujours positif, le signe de la fraction $f'(x)$ est égal au signe de son numérateur (le « haut » de la fraction).

Exercice 6 (Variations d'une fonction rationnelle)**.** On reprend la fonction $f(x)$ de l'exercice précédent ; on rappelle que $f'(x) = \frac{75}{(x+3)^2}$.

1. Déterminer le signe de $f'(x)$.
2. En déduire le signe de la fonction f sur son ensemble de définition.