

Une entreprise, qui fabrique et vend des ordinateurs sur commande, modélise le bénéfice en euros pour x ordinateurs fabriqués et vendus en une journée, par la fonction :

$$f(x) = x^3 - 60x^2 + 900x - 500.$$

L'entreprise ne pouvant construire plus de 30 ordinateurs par jour, on aura $0 \leq x \leq 30$.

1. (a) Calculons le bénéfice pour 4 puis pour 10 ordinateurs.

$$f(4) = 4^3 - 60 \times 4^2 + 900 \times 4 - 500 = 2\,204, \quad f(10) = 3\,500.$$

Le bénéfice pour 4 ordinateurs est de 2 204 euros et pour 10 ordinateurs de 3 500 euros.

- (b) Calculons $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f .

$$f'(x) = 3x^2 - 60(2x) + 900 = 3x^2 - 120x + 900.$$

- (c) Avant d'étudier le signe de $f'(x)$, commençons par déterminer les éventuelles racines de f .

$\Delta = (-120)^2 - 4 \times 3 \times 900 = 3600$. Donc $\Delta > 0$ le trinôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$x_1 = \frac{120 - \sqrt{3600}}{2 \times 3} = 10 \qquad x_2 = \frac{120 + \sqrt{3600}}{2 \times 3} = 30.$$

Donc le polynôme a deux racines 10 et 30. Le tableau de signes de f' est donc (le signe pour $x > 30$ n'est pas donné dans le tableau, car cela sort du domaine de définition de f) :

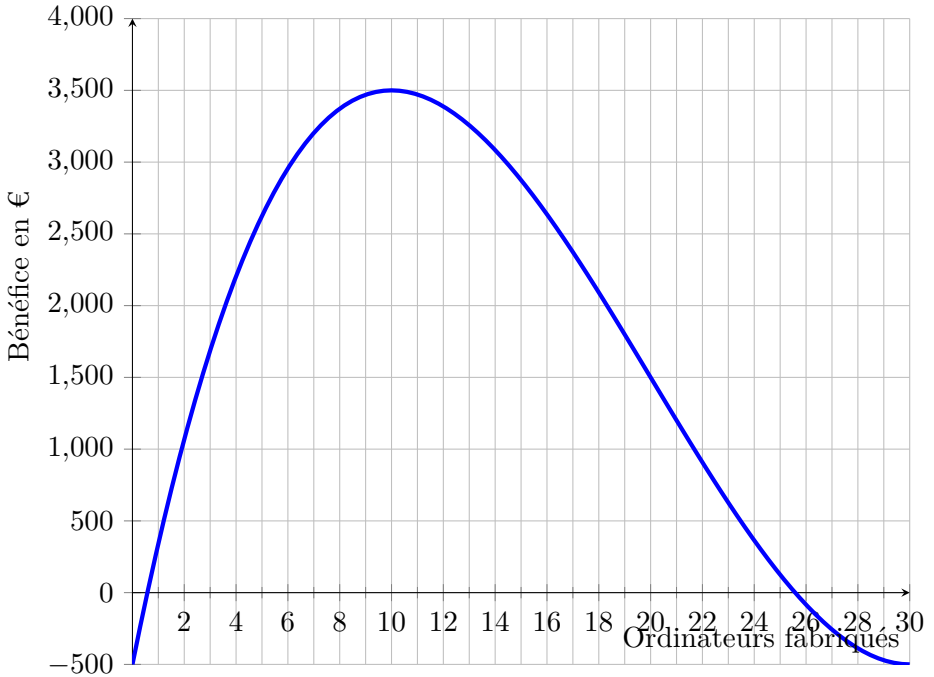
| | | | | | |
|---------|---|----|----|---|---|
| x | 0 | 10 | 30 | | |
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 |

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation de f .

| | | | | | |
|---------|------|----|------|---|------|
| x | 0 | 10 | 30 | | |
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | |
| $f(x)$ | -500 | ↗ | 2500 | ↘ | -500 |

- (d) Pour avoir un bénéfice maximal, l'entreprise doit fabriquer et vendre chaque jour 10 ordinateurs. Le bénéfice s'élèvera alors à 3 500 euros.

2. La courbe \mathcal{C} donnée ci-dessous représente l'évolution du bénéfice en fonction du nombre d'ordinateurs fabriqués et vendus en une journée suivant le modèle choisi par l'entreprise.



- (a) Par lecture graphique, déterminons combien d'ordinateurs l'entreprise doit fabriquer et vendre en une journée si elle veut un bénéfice d'au moins 2 500 €.

Les solutions devant être entières, l'entreprise doit fabriquer et vendre entre 5 et 16 ordinateurs par jour.

- (b) Une grande surface veut acheter des ordinateurs. Elle propose au choix deux contrats à cette entreprise :

- contrat A : acheter 300 ordinateurs à fabriquer en dix jours ;
- contrat B : acheter 100 ordinateurs à fabriquer en cinq jours.

L'entreprise a intérêt à choisir le contrat B. En effet si elle choisit le contrat A, cela l'obligera à fabriquer trente ordinateurs par jour et perdra par jour 500 euros, tandis qu'avec, le contrat B, elle fabriquera 20 ordinateurs par jour et ainsi elle gagnera 1 500 euros par jour.