

Baccalauréat ES Amérique du sud

Septembre 2018

On s'intéresse à l'ensemble des ascenseurs d'une grande ville en 2017.

Pour chacun d'eux, un contrat annuel d'entretien doit être souscrit.

Deux sociétés d'ascensoristes, notées A et B , se partagent ce marché.

En 2017, la société A entretient 30 % de ces ascenseurs.

On estime que, chaque année :

- 3 % des ascenseurs entretenus par la société A seront entretenus par la société B l'année suivante ;
- 5 % des ascenseurs entretenus par la société B seront entretenus par la société A l'année suivante ;
- les autres ascenseurs ne changeront pas de société d'ascensoristes l'année suivante.

On étudie l'évolution, au fil des années, de la répartition des contrats d'entretien de ces ascenseurs entre les sociétés A et B .

Pour un ascenseur choisi au hasard, et pour tout entier naturel n , on note :

- a_n la probabilité que l'ascenseur choisi soit entretenu par la société A lors de l'année $(2017 + n)$;
- b_n la probabilité que l'ascenseur choisi soit entretenu par la société B lors de l'année $(2017 + n)$;
- $P_n = (a_n \quad b_n)$ l'état probabiliste de l'année $(2017 + n)$.

On a donc $P_0 = (0,3 \quad 0,7)$.

Partie A

- (a) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B .
- (b) Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
2. Déterminer la probabilité que l'ascenseur choisi soit entretenu par la société A en 2018.
3. Montrer que $P = (0,625 \quad 0,375)$ est un état stable de la matrice et interpréter le résultat.
4. Démontrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$a_{n+1} = 0,92a_n + 0,05.$$

Partie B

Le directeur de la société A constate que la proportion d'ascenseurs entretenus par sa société augmente au cours des années et se stabilise à 62,5 %.

- (a) Indiquer, en le justifiant, lequel des algorithmes suivants donne l'année à partir de laquelle cette proportion dépasse 50 %.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
$A \leftarrow 0,3$ $N \leftarrow 0$ Tant que $A \leq 0,5$ $A \leftarrow 0,92 \times A + 0,05$ $N \leftarrow N + 1$ Fin Tant que Afficher $2017 + N$	$A \leftarrow 0,3$ $N \leftarrow 0$ Tant que $A > 0,5$ $A \leftarrow 0,92 \times A + 0,05$ $N \leftarrow N + 1$ Fin Tant que Afficher $2017 + N$	$A \leftarrow 0,3$ $N \leftarrow 0$ Tant que $A \leq 0,5$ $A \leftarrow 0,92 \times A + 0,05$ Fin Tant que $N \leftarrow N + 1$ Afficher $2017 + N$

- (b) Exécuter l'algorithme qui détermine l'année en question.
2. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = a_n - 0,625$.
 - (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_0 .
 - (b) En déduire que, pour tout entier naturel n , on a :

$$a_n = -0,325 \times 0,92^n + 0,625.$$

- (c) Déterminer la limite de la suite (a_n) . Interpréter le résultat.
3. À l'aide de l'expression donnée dans la question **2. b.**, résoudre l'inéquation

$$a_n \geq 0,5.$$

Quel résultat antérieur retrouve-t-on ?