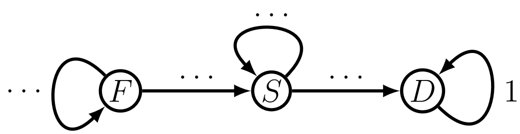
Exercice 2 (D'après le sujet de bac des Centres Étrangers — 11 juin 2018)**.** Une société d'autoroute étudie l'évolution de l'état de ses automates de péage en l'absence de maintenance.
Un automate peut se trouver dans l'un des états suivants :

- fonctionnel (F) ;
- en sursis (S) s'il fonctionne encore, mais montre des signes de faiblesse ;
- défaillant (D) s'il ne fonctionne plus.

La société a observé que d'un jour sur l'autre :

- concernant les automates fonctionnels, 90 % le restent et 10 % deviennent en sursis ;
- concernant les automates en sursis, 80 % le restent et 20 % deviennent défaillants.

1. (a) Reproduire et compléter le graphe probabiliste ci-après qui représente les évolutions possibles de l'état d'un automate.



   (b) Interpréter le nombre 1 qui apparaît sur ce graphe.

   (c) Voici la matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre F, S, D.

   Préciser la signification du coefficient $0,2$ dans cette matrice.

2. À compter d'une certaine date, la société relève chaque jour à midi l'état de ses automates. On note ainsi pour tout entier naturel n :
   - f_n la probabilité qu'un automate soit fonctionnelle n-ième jour ;
   - s_n la probabilité qu'un automate soit en sursis le n-ième jour ;
   - d_n la probabilité qu'un automate soit défaillant le n-ième jour.

On note alors $P_n = \begin{pmatrix} f_n & s_n & d_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste le n-ième jour.

Enfin, la société observe qu'au début de l'expérience tous ses automates sont fonctionnels : on a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer P_1.

(b) Montrer que, le 3[e] jour, l'état probabiliste est

$$\begin{pmatrix} 0,729 & 0,217 & 0,054 \end{pmatrix}$$

(c) Vérifier que ce graphe possède un unique état stable $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Quelle est la signification de ce résultat pour la situation étudiée ?

3. (a) Justifier que pour tout entier naturel n, $s_{n+1} = 0,1 f_n + 0,8 s_n$.

(b) On vérifierait de même que pour tout entier naturel n,

$$d_{n+1} = 0,2 s_n + d_n \quad \text{et} \quad f_{n+1} = 0,9 f_n.$$

Compléter l'algorithme ci-dessous de sorte qu'il affiche le nombre de jours au bout duquel 30 % des automates ne fonctionnent plus.

```
D ← 0
S ← ...
F ← 1
N ← 0
Tant que ...
        D ← 0,2 × S + D
        S ← 0,1 × F + 0,8 × S
        F ← 0,9 × F
        N ← ...
Fin Tant que
Afficher ...
```

(c) Au bout de combien de jours la proportion d'automates défaillants devient-elle supérieure à 30 % ?

(d) Dans le codage de la boucle « Tant que », l'ordre d'affectation des variables D, S et F est-il important ? Justifier.