

Exercice 2 (D'après le sujet de bac du Liban— 29 mai 2018). Dans un pays deux opérateurs se partagent le marché des télécommunications mobiles. Une étude révèle que chaque année :

- parmi les clients de l'opérateur *EfficaceRéseau*, 70 % se réabonnent à ce même opérateur et 30 % souscrivent un contrat avec l'opérateur *GenialPhone* ;
- parmi les clients de l'opérateur *GenialPhone*, 55 % se réabonnent à ce même opérateur et 45 % souscrivent un contrat avec l'opérateur *Efficaceréseau*.

On note E l'état : « la personne possède un contrat chez l'opérateur *EfficaceRéseau* » et G l'état : « la personne possède un contrat chez l'opérateur *GenialPhone* ».

À partir de 2018, on choisit au hasard un client de l'un des deux opérateurs.

On note également :

- e_n la probabilité que le client possède un contrat avec l'opérateur *EfficaceRéseau* au 1^{er} janvier (2018 + n) ;
- g_n la probabilité que le client possède un contrat avec l'opérateur *GenialPhone* au 1^{er} janvier (2018 + n) ;
- $P_n = (e_n \quad g_n)$ désigne la matrice ligne traduisant l'état probabiliste du système au 1^{er} janvier (2018 + n).

Au 1^{er} janvier 2018, on suppose que 10 % des clients possèdent un contrat chez *EfficaceRéseau*, ainsi $P_0 = (0, 1 \quad 0, 9)$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets E et G .
2. (a) Déterminer la matrice de transition M associée au graphe en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique.
 (b) Vérifier qu'au 1^{er} janvier 2020, environ 57 % des clients ont un contrat avec l'opérateur *EfficaceRéseau*.
3. (a) On rappelle que pour tout entier naturel n , $P_{n+1} = P_n \times M$.
 Exprimer e_{n+1} en fonction de e_n et g_n .
 (b) En déduire que pour tout entier naturel n , $e_{n+1} = 0, 25e_n + 0, 45$.
4. (a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous de façon à ce qu'il affiche l'état probabiliste au 1^{er} janvier (2018 + n) :

```

E ← 0, 1
G ← 0, 9
Pour I allant de 1 à N
    E ← ... × E + ...
    G ← ...
Fin Pour
Afficher E et G
```

- (b) Déterminer l'affichage de cet algorithme pour $N = 3$. Arrondir au centième.
- (c) Déterminer l'état stable du système et interpréter votre réponse dans le contexte de l'exercice.