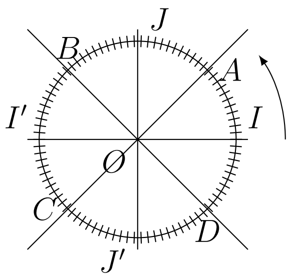
Angles et Arcs

1 Longueur d'un arc de cercle

Une petite fille joue avec un train électrique, roulant sur des rails disposés en cercle de rayon 1 m. On modélise le problème dans un repère orthonormé (O, I, J), où O est le centre du cercle. Les points I' et J' sont les symétriques des points I et J par le point O.

Les bissectrices des angles $\widehat{IOJ}$ et $\widehat{JOI'}$ coupent le cercle de centre O et de rayon 1 cm en A, B, C et D.

Le train, que l'on considère ponctuel (aussi petit qu'un point), part du point I et parcourt le cercle dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.



Dans toute cette partie, on ne manipulera que des mètres. On s'autorise donc à ne pas indiquer l'unité de longueur.

Exercice 1.

1. Quelle distance le train a-t-il parcouru quand il revient en I après un tour complet ?

Le train a parcouru la circonférence du cercle, de rayon 1m : il a donc parcouru $2\pi \times 1 = 2\pi$.

2. Quelle distance aura-t-il parcouru quand il arrive pour la première fois en I' ? en J ?

En I', le train à parcouru la moitié de la circonférence, soit $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

En J, le train a parcouru le quart de la circonférence, soit $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

On remarque ici que la distance parcoure est proportionnelle à l'angle formé avec le centre O. Si le train parcourt un tour complet, soit 360°, il aura parcour une distance de 2π.

Exemple 1. *Quelle distance le train aura-t-il parcouru quand il arrive pour la première fois en A ?*

Remarquons d'abord que l'angle $\widehat{IOA}$ mesure 45°.

Le tableau suivant est un tableau de proportionnalité.

Angle	360	45
Distance	2π	

Donc la distance parcourue sera : $\frac{45\times 2\pi}{360} = \frac{90\times\pi}{90\times 4} = \frac{\pi}{4}$.

Exemple 2. *Le train parcourt une distance de $1,5\pi$ pour arriver au point M. Combien mesure l'angle $\widehat{IOM}$?*

Nous utilisons le même tableau de proportionnalité.

Angle	360	
Distance	2π	$1,5\pi$

Donc l'angle $\widehat{IOM}$ mesure $\frac{1,5\pi\times 360}{2\pi} = \frac{1,5\pi\times 180\times 2}{2\pi} = 1,5\times 180 = 270$, soit 270°.

Exercice 2. *Utiliser le tableau de proportionnalité des deux exemples précédents.*

1. Quelle distance aura parcouru le train lorsqu'il arrive en C ? en J' ? en B ?
2. En quel point arrive le train après avoir parcouru $\frac{\pi}{2}$? de $\frac{3\pi}{2}$? de $\frac{7\pi}{4}$?

2 Sens de rotation

On prend la convention suivante : une longueur positive correspond à un déplacement dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ; une longueur négative correspond à un déplacement dans le sens des aiguilles d'une montre.

Exemple 3.

- Le train parcourt une distance de 2π : il part de I, passe par A, J, etc. jusqu'à revenir à I.
- Le train parcourt une distance de -2π : il part de I, passe par D, J', etc. jusqu'à revenir à I.

Dans les deux cas, il a parcouru 2π, mais le sens de rotation change.

Exemple 4.

- *Le train arrive en C dans le sens des aiguilles d'une montre. Quelle distance a-t-il parcouru ?*
- *Le train arrive en D. Donner deux distances possibles qu'il ait parcouru.*
- Reprenons le tableau de proportionnalité, en remarquant que l'angle $\widehat{IOC}$ mesurent 135°.

Angle	360	135
Distance	2π	

  La distance parcourue est donc $\frac{135\times 2\pi}{360} = \frac{135\times 2}{360}\pi = \frac{3}{4}\pi$. Mais cette distance est parcourue dans le sens des aiguille d'une montre, donc elle est négative : elle vaut $-\frac{3}{4}\pi$.
- Si le train se déplace dans le sens des aiguilles d'une montre, l'angle $\widehat{IOD}$ mesure 315°, donc il aura parcouru $\frac{7}{8}\pi$ (il faut utiliser le tableau de proportionnalité pour faire le calcul).

  Si au contraire le train se déplace dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, l'angle $\widehat{IOD}$ ne mesure alors que 45°, donc le train aura parcouru $-\frac{\pi}{8}$.

  Donc suivant le sens de rotation du train, il y a deux manières d'arriver jusqu'au point D (et il y en a encore d'autres).