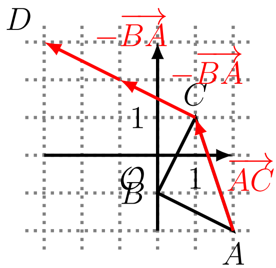
Aucune démonstration par lecture graphique ne sera acceptée !

Exercice 1. *Dans le plan muni d'un repère, on considère les points* $A\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ *et* $C\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. *On définit le point* D *par la relation :*

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BA}$$

1. *Sur une figure, placer les points A, B, C, puis le point D en respectant la relation.*



2. (a) *Calculer les coordonnées de* $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BA}$, *puis montrer que les coordonnées de* $\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BA}$ *sont* $\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}x_C - x_A\\ y_C - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-2\\ 1-(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}x_A - x_B\\ y_A - y_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-0\\ -2-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

Donc les coordonnées de $\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BA}$ sont :

$$\left(\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BA}\right) = \begin{pmatrix}x_{\overrightarrow{AC}} - 2\times x_{\overrightarrow{BA}}\\ y_{\overrightarrow{AC}} - 2\times y_{\overrightarrow{BA}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1-2\times 2\\ 3-2\times(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$$

(b) *En déduire les coordonnées du point D.* Notons $D\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ les coordonnées de D. Alors, d'une part :

$$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}x_D - x_A\\ y_D - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-2\\ y-(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-2\\ y+2\end{pmatrix}$$

Et d'autre part, on sait que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BA}$, donc que $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$.

Donc $\begin{pmatrix}x-2\\y+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$, et :

$$\begin{aligned} x-2 &= -5 \\ x &= -5+2 \\ x &= -3 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} y+2 &= 5 \\ y &= 5-2 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Donc les coordonnées de D sont $D\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$.

3. *Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?*

On a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-2\\-1-(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3-1\\3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$$

Donc :

$$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = \begin{vmatrix}-2 & -4\\1 & 2\end{vmatrix} = -2\times 2 - (-4)\times 1 = -4+4 = 0$$

Donc le déterminant est nul, et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, et les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 2. *On considère les points $A\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, et on cherche les coordonnées d'un point C tel que : (1) son abscisse et son ordonnée soient égales ; (2) les points A, B, C soient alignés.*

On nomme $C\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix}$ les coordonnées de C.

1. *Montrer que les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$.*

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-2)\\4-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$$

On admet que les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ sont $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x+2\\x\end{pmatrix}$.

2. *Montrer que les trois points sont alignés si et seulement si : $x-8=0$.*

   Les trois points sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si :

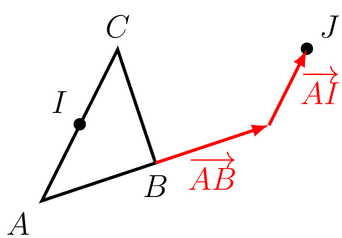
$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)&=0\\ \begin{vmatrix}5 & x+2\\ 4 & x\end{vmatrix}&=0\\ 5\times x-(x+2)\times 4&=0\\ 5x-4x-8&=0\\ x-8&=0\end{aligned}$$

3. *En déduire la valeur de x, puis les coordonnées de C.*

   Puisque $x-8=0$, alors $x=8$ et les coordonnées de C sont $C\begin{pmatrix}8\\8\end{pmatrix}$.

Exercice 3. *On considère le triangle ABC, et I le milieu de $[AC]$. On construit le point J tel que $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI}$.*

1. *Faire une figure.*



On remarque qu'en appliquant la relation de Chasles, on obtient :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$$

2. *Montrer que $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{AB}$.*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} \\ &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI} \\ &= \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{IA} \\ &= 2\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

3. *Que peut-on dire des droites (IJ) et (AB) ? Justifier.*
   Puisque $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{AB}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, et les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.