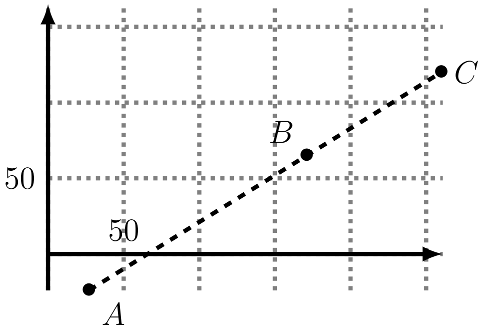
Exercice 1 (5 points)**.** *Dans un repère, on considère les points* $A\,(27;-24)$, $B\,(171;65)$, $C\,(260;120)$.

1. *Placer les points A, B, C dans un repère.*



2. *Par lecture graphique, conjecturer si les points A, B, C sont alignés ou non.*

   On conjucture que les points sont alignés.

3. *Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Votre conjecture est-elle correcte ?*

   On a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}171-27\\ 65-(-24)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}144\\ 89\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C - x_A\\ y_C - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}260-27\\ 120-(-24)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}233\\ 144\end{pmatrix}$$

   Calculons le déterminant :

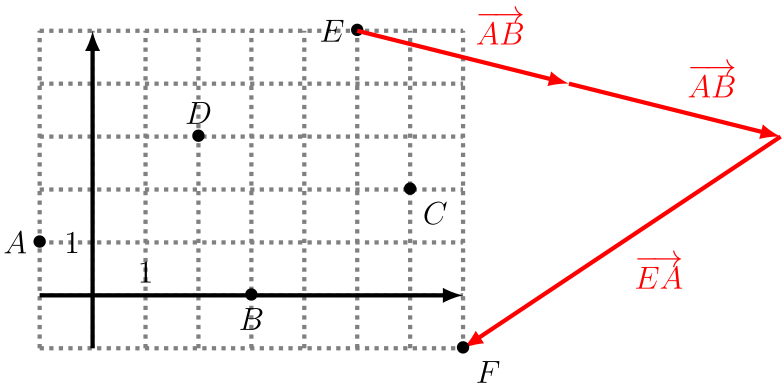
$$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix}144 & 233\\ 89 & 144\end{vmatrix} = 144\times144 - 89\times233 = -1 \neq 0$$

   Le déterminant est non nul, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, et les points A, B, C ne sont pas alignés : la conjecture de la question précédente était donc fausse.

Exercice 2 (9 points)**.** *Dans un repère quelconque, on considère les points* $A\,(-1;1)$, $B\,(3;0)$, $C\,(6;2)$, $D\,(2;3)$, $E\,(5;5)$. *On construit le point* F *tel que :*

$$\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EA}$$

1. *Tracer un repère allant de* -1 *à* 7 *en abscisse, et de* -1 *à* 5 *en ordonnée, et y placer les six points* A, B, C, D, E, F.



2. (a) *Déterminer les coordonnées des vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{EA}$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-1)\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{EA}\begin{pmatrix}-1-5\\1-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}$$

(b) *Les points A, B, E sont-ils alignés ?*

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{EA}\right) &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 4\times(-4)-(-6)\times(-1) \\ &= -22 \\ &\neq 0\end{aligned}$$

Le déterminant n'est pas nul, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EA}$ ne sont pas colinéaires, et les points A, B, E en sont pas alignés.

3. (a) *Montrer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}$ sont $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$.*

Puisque $\overrightarrow{EF}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EA}$, alors :

$$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}2\times x_{\overrightarrow{AB}}+x_{\overrightarrow{EA}}\\ 2\times y_{\overrightarrow{AB}}+y_{\overrightarrow{EA}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times 4+(-6)\\ 2\times(-1)+(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$$

(b) *Déterminer les coordonnées du point F.*

Notons $F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ les coordonnées de F. Alors :

$$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}x_F-x_E\\ y_F-y_E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-5\\ y-5\end{pmatrix}$$

Or nous avons montré que $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$, donc :

$$\begin{aligned}x-5&=2 \\ x&=7\end{aligned}\qquad\qquad\begin{aligned}y-5&=-6 \\ y&=-1\end{aligned}$$

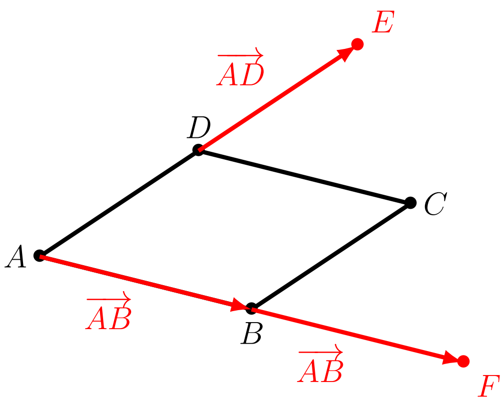
$$\text{Les coordonnées de } F \text{ sont donc } F\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}.$$

4. *On admet que les coordonnées de $\overrightarrow{EC}$ sont $\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$. Quelle est la position du point C par rapport au segment $[EF]$? Justifier.*

   Puisque $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{EC}$ et C est le milieu de $[EF]$.

Exercice 3 (8 points)**.** *On considère un parallélogramme $ABCD$, et deux points E et F tels que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB}$.*

1. *Tracer un parallélogramme $ABCD$ quelconque, et placer les points E ef F.*



2. *On remarque que d'après la relation de Chasles, on a :*

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF}$$

(a) *Montrer que* $\overrightarrow{EF} = 2\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}\right)$

On remarque que puisque $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD}$, alors $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DA}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} && \text{Relation de Chasles}\\
&= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} && \text{car } \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DA}\\
&= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AB} && \text{car } \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB}\\
&= 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AB}\\
&= 2\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}\right)
\end{aligned}$$

En appliquant à nouveau la relation de Chasles, on obtient donc :

$$\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{DB}$$

(b) *Quelle est la position relative des droites* (EF) *et* (DB) *? Justifier.*

Nous avons montré que $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{DB}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires, et les droites (EF) et (DB) sont parallèles.

3. *En faisant un raisonnement similaire, on arrive à montrer que* $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DB}$.

(a) *Justifier que* $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{EC}$.

Nous avons montré que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DB}$, et que $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{DB}$. Donc :

$$\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{EC}$$

(b) *Les points C, E, F sont-ils alignés ? Justifier.* Puisque $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{EC}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires, et les points E, C, F sont alignés.