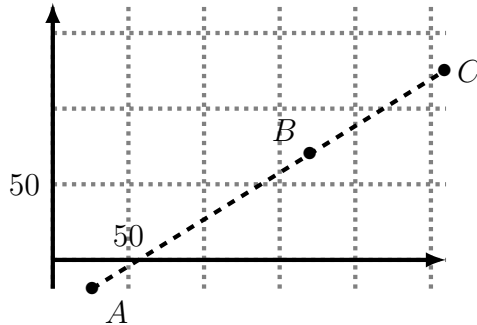


Exercice 1 (5 points). Dans un repère, on considère les points $A(26; -19)$, $B(170; 70)$, $C(259; 125)$.

1. Placer les points A , B , C dans un repère.



2. Par lecture graphique, conjecturer si les points A , B , C sont alignés ou non.

On conjecture que les points sont alignés.

3. Calculer les coordonnées de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} . Votre conjecture est-elle correcte ?

On a :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 170 - 26 \\ 70 - (-19) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 \\ 89 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 259 - 26 \\ 125 - (-19) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 233 \\ 144 \end{pmatrix}$$

Calculons le déterminant :

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 144 & 233 \\ 89 & 144 \end{vmatrix} = 144 \times 144 - 89 \times 233 = -1 \neq 0$$

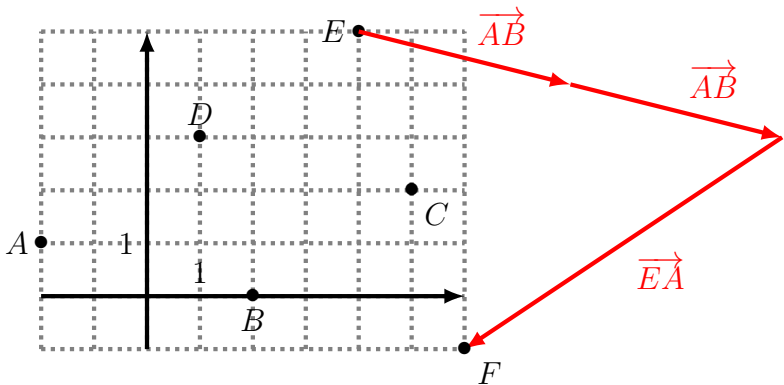
Le déterminant est non nul, donc les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires, et les points A , B , C ne sont pas

alignés : la conjecture de la question précédente était donc fausse.

Exercice 2 (9 points). *Dans un repère quelconque, on considère les points $A(-2; 1)$, $B(2; 0)$, $C(5; 2)$, $D(1; 3)$, $E(4; 5)$. On construit le point F tel que :*

$$\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EA}$$

1. *Tracer un repère allant de -2 à 6 en abscisse, et de -1 à 5 en ordonnée, et y placer les six points A , B , C , D , E , F .*



2. (a) *Déterminer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{EA} .*

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 - (-2) \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EA} \begin{pmatrix} -2 - 4 \\ 1 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(b) Les points A , B , E sont-ils alignés ?

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{EA}) &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 4 \times (-4) - (-6) \times (-1) \\ &= -22 \\ &\neq 0\end{aligned}$$

Le déterminant n'est pas nul, donc les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{EA} ne sont pas colinéaires, et les points A , B , E en sont pas alignés.

3. (a) Montrer que les coordonnées du vecteur \overrightarrow{EF} sont $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Puisque $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EA}$, alors :

$$\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 2 \times x_{\overrightarrow{AB}} + x_{\overrightarrow{EA}} \\ 2 \times y_{\overrightarrow{AB}} + y_{\overrightarrow{EA}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 4 + (-6) \\ 2 \times (-1) + (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(b) Déterminer les coordonnées du point F .

Notons $F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées de F . Alors :

$$\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 4 \\ y - 5 \end{pmatrix}$$

Or nous avons montré que $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, donc :

$$\begin{array}{rcl} x - 4 & = & 2 \\ x & = & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} y - 5 & = & -6 \\ y & = & -1 \end{array}$$

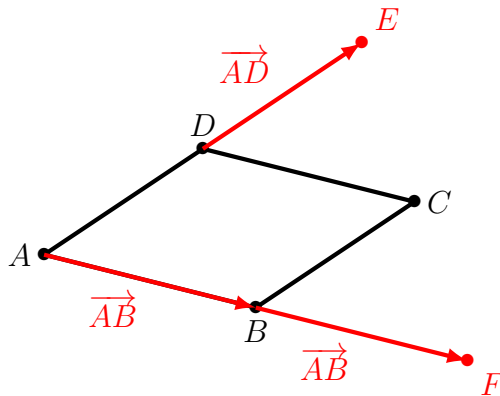
Les coordonnées de F sont donc $F \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. On admet que les coordonnées de \overrightarrow{EC} sont $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Quelle est la position du point C par rapport au segment $[EF]$? Justifier.

Puisque $\overrightarrow{EC} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{EC}$ et C est le milieu de $[EF]$.

Exercice 3 (8 points). On considère un parallélogramme $ABCD$, et deux points E et F tels que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB}$.

1. Tracer un parallélogramme $ABCD$ quelconque, et placer les points E et F .



2. On remarque que d'après la relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF}$$

(a) Montrer que $\overrightarrow{EF} = 2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB})$

On remarque que puisque $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD}$, alors $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DA}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} && \text{Relation de Chasles} \\ &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} && \text{car } \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AB} && \text{car } \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB} \\ &= 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AB} \\ &= 2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) \end{aligned}$$

En appliquant à nouveau la relation de Chasles, on obtient donc :

$$\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{DB}$$

(b) Quelle est la position relative des droites (EF) et (DB) ? Justifier.

Nous avons montré que $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{DB}$, donc les vecteurs \overrightarrow{EF} et \overrightarrow{DB} sont colinéaires, et les droites (EF) et (DB) sont parallèles.

3. En faisant un raisonnement similaire, on arrive à montrer que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DB}$.

(a) Justifier que $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{EC}$.

Nous avons montré que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DB}$, et que $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{DB}$. Donc :

$$\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{EC}$$

- (b) *Les points C, E, F sont-ils alignés ? Justifier.* Puisque $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{EC}$, alors les vecteurs \overrightarrow{EF} et \overrightarrow{EC} sont colinéaires, et les points E, C, F sont alignés.