Exercice 1. *On considère la fonction $f : x \mapsto -5x + 15$, et la fonction g dont on connait le tableau de signes suivant.*

x	$-\infty$		-1		∞
$g(x)$		$+$	0	$-$	

1. *Dresser les tableaux de signe et de variations de f.*

   (a) *Variations* f est une fonction affine de coefficient directeur -5, négatif, donc elle est décroissante.

x	$-\infty$	$+\infty$
f	↘	

   (b) *Signe* f est une fonction affine de coefficient directeur -5, négatif, donc elle est décroissante, donc d'abord positive, puis négative. Elle change de signe en $-\frac{15}{-5} = 3$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$-5x + 15$		$+$	0	$-$	

2. *Compléter, sans justifier, en utilisant l'un des quatre signes $\boxed{<}$, $\boxed{>}$, $\boxed{=}$ ou $\boxed{?}$ (s'il manque des informations pour répondre à la question).*

   (a) $g(2) \dots 5$
   D'après le tableau de signes de g, $g(2) < 0$. Donc si $g(2)$ est négatif, alors $g(2) < 5$.

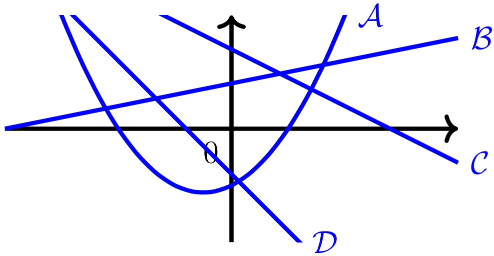
   (b) $f(-3) \dots 0$
   D'après le tableau de signes de f, $f(-3)$ est strictement positif, donc $f(-3) > 0$.

(c) $f(6) \ldots g(1)$
D'après les tableaux de signes de f et g, on a : $f(6) < 0$, et $g(6) < 0$. Les deux sont négatifs, mais on ne sait pas lequel des deux est le plus petit : on manque d'informations pour répondre.

(d) $f(-1) \ldots g(-1)$
D'après les tableaux de signes de f et g, on a $f(-1) > 0$ et $g(-1) = 0$, donc $f(-1) > g(-1)$.

Exercice 2.

Sur le repère suivant, dont l'échelle est inconnue, quatre courbes ont été tracées. Laquelle correspond à la fonction définie par : $f(x) = -2x + 6$? Justifier.



Puisque f est une fonction affine, alors sa courbe représentative est une droite : cela exclut la courbe $\mathcal{A}$: il ne reste que : $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$.
Puisque le coefficient directeur de f, -2, est négatif, alors f est décroissante. Cela exclut la courbe $\mathcal{B}$: il ne reste que $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{D}$.
Puisque l'ordonnée à l'origine de f, 6, est positif, alors la courbe de f coupe l'axe des ordonnées en 6, c'est-à-dire au dessus de l'axe des abscisses. Donc seule la courbe $\mathcal{B}$ correspond.

Exercice 3. *L'objet de l'exercice est de résoudre l'inéquation :*

$$-8x^2 + 27x - 15 \geqslant -2x^2 + 15$$

1. *Montrer que résoudre : $-8x^2+27x-15 \geqslant -2x^2+15$ est équivalent à résoudre : $-6x^2 + 27x - 30 \geqslant 0$.*

$$\begin{aligned} -8x^2+27x-15 &\geqslant -2x^2+15 \\ -8x^2+27x-15+2x^2-15 &\geqslant 0 \\ -6x^2+27x-30 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

2. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$-6x^2+27x-30 = (-2x+5)(3x-6)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (-2x+5)(3x-6) &= -2x \times 3x + (-2x) \times (-6) + 5 \times (3x) + 5 \times (-6) \\ &= -6x^2 + 12x + 15x - 30 \\ &= -6x^2 + 27x - 30 \end{aligned}$$

3. *Recopier et compléter le tableau de signes suivant.*

x	$-\infty$		2		$2{,}5$		$+\infty$
$-2x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x-6$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-2x+5)(3x-6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. *En déduire les solutions de l'inéquation de départ.*

D'après le tableau de signes, les solutions de $(-2x+5)(3x-6) \geqslant 0$ sont $x \in [2; 2,5]$.

Or nous avons montré que $(-2x+5)(3x-6) = -6x^2+27x-30$, donc les solutions de $-6x^2+27x-30 \geqslant 0$ sont aussi $x \in [2; 2,5]$.

Enfin, nous avons montré à la première question que les inéquations $-8x^2+27x-15 \geqslant -2x^2+15$ et $-6x^2+27x-30 \geqslant 0$ sont équivalentes, donc les solutions de $-8x^2+27x-15 \geqslant -2x^2+15$ sont aussi $x \in [2; 2,5]$.

Exercice 4. *On considère une fonction affine f, dont on sait que $f(13) = 12$ et $f(9) = 17$.*

1. *Montrer que l'équation de la fonction f est : $f : x \mapsto -1,25x + 28,25$.*

   Puisque f est une fonction affine, elle est de la forme $f(x) = ax+b$.
   Le coefficient directeur a est :

$$\begin{aligned} a &= \frac{f(13) - f(9)}{13 - 9} \\ &= \frac{12 - 17}{4} \\ &= \frac{-5}{4} \\ &= -1,25 \end{aligned}$$

   Donc f est de la forme $f(x) = -1,25x + b$. Calculons l'ordonnée à l'origine b.
   Puisqeu $f(9) = 17$, alors :

$$\begin{aligned} f(9) &= 17 \\ -1,25 \times 9 + b &= 17 \\ -11,25 + b &= 17 \\ b &= 17 + 11,25 \\ b &= 28,25 \end{aligned}$$

   Donc l'expression de f est : $f(x) = -1,25x + 28,25$.

2. *Quelles sont les variations de f ? Justifier.*

   La fonction f est affine de coefficient directeur $-1,25$, négatif, donc elle est décroissante.

3. *Le point $C(123; -125,5)$ est-il sur la courbe de f ? Justifier.*

   Calculons $f(123)$:

$$f(123) = -1,25 \times 123 + 28,25 = -125,5$$

   Donc les coordonnées du point C sont bien de la forme $(123; f(123))$: il est sur la courbe de f.

Exercice 5. *La gestionnaire d'un lycée étudie plusieurs propositions pour l'achat de ramettes de papier dans un lycée.*

A *Chaque ramette est vendue à 2,54 €.*

B *Le lycée souscrit un contrat à 230 €, puis chaque ramette est ensuite vendue à 2,02 €.*

L'objet de l'exercice est de déterminer le contrat le plus avantageux en fonction du nombre de ramette consommées dans l'année.
On admet que pour x ramettes de papier consommées, le coût est donné par la fonction $A : x \mapsto 2,54x$ pour l'entreprise A, et $B : x \mapsto 2,02x + 230$ pour l'entreprise B.

1. *Résolution graphique*

   (a) *Tracer les courbes des fonctions A et B sur le graphique ci-dessous.*

   Dans chacun des cas, on prend deux valeurs de x distinctes, et on calcule les images par la fonction.

   Courbe A Pour $x = 0$, on a $A(0) = 2,54 \times 0 = 0$. Donc le point de coordonnées $(0; 0)$ est sur la courbe de A.

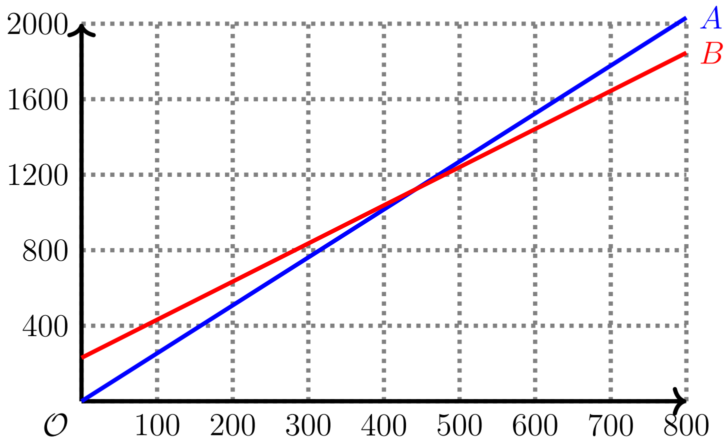
   Pour $x = 500$, on a $A(500) = 2,54 \times 500 = 1270$, donc le point de coordonnées $(500; 1270)$ est sur la courbe de A.

   Courbe B Pour $x = 0$, on a $B(0) = 2,02 \times 0 + 230 = 230$. Donc le point de coordonnées $(0; 230)$ est sur la courbe de B.

   Pour $x = 400$, on a $B(400) = 2,02 \times 400 + 230 = 1208$, donc le point de coordonnées $(400; 1208)$ est sur la courbe de B.

   (b) *Répondre par lecture graphique : À partir de combien de ramettes vendues le contrat B sera-t-il plus avantageux que le contrat A ?*

   Les deux courbes se croisent approximativement en $x \approx 450$, donc le contrat B sera plus avantageux que le contrat A à partir d'environ 450 ramettes de papier achetées.



2. *Résolution algébrique On souhaite répondre à la même question, mais par le calcul.*

   (a) *Montrer que le contrat B est plus avantageux que le contrat A si et seulement si :* $0,52x - 230 \geqslant 0$.

   Le contrat B est plus avantageux que le contrat A si et seulement si :

$$\begin{aligned} A(x) &\geqslant B(x) \\ 2,54x &\geqslant 2,02x + 230 \\ 2,54x - 2,02x - 230 &\geqslant 0 \\ (2,54 - 2,02)x - 230 &\geqslant 0 \\ 0,52x - 230 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

   (b) *Dresser le tableau de signes de la fonction* $x \mapsto 0,52x - 230$ *(arrondir les valeurs à l'unité si nécessaire).*

   La fonction $0,52x - 230$ est une fonction affine de coefficient directeur $0,52$, positif : elle est donc croissante (donc d'abord négative, puis positive), et elle change de signe en $-\frac{-230}{0,52} \approx 442$.

x	$-\infty$		442		∞
$0,52x-230$		$-$	0	$+$	

(c) *Conclure en lisant le tableau de signes : À partir de combien de ramettes de papier vendues le contrat B est-il plus avantageux que le contrat A ?*

D'après le tableau de signes, les solutions de $0,52x-230 \geqslant 0$ sont $x \geqslant 442$ (environ), donc le contrat B est plus avantageux que le contrat B à partir de 442 ramettes de papier vendues.