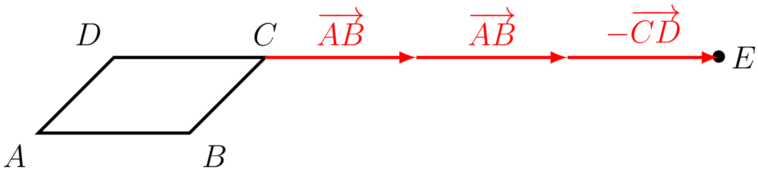
Exercice 2. *Soit $ABCD$ un parallélogramme, et E un point tel que $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$.*

1. *Faire une figure.*

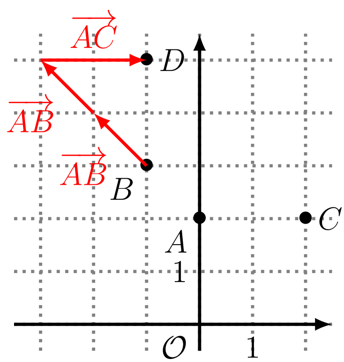


2. *Montrer que $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{AB}$.*
   Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, et :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CE} &= 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}\\ &= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\\ &= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}\\ &= 3\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

3. *En déduire que les droites (CE) et (AB) sont parallèles.*
   Puisque $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{AB}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc les droites (CE) et (AB) sont parallèles.

Exercice 3. *Dans le plan muni d'un repère, on considère trois points $A(0;2)$, $B(-1;3)$ et $C(2;2)$, ainsi qu'un quatrième point D tel que $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.*

Même si ce n'est pas demandé, faisons une figure.



1. *Déterminer les coordonnées de D.*

   Notons $D\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ les coordonnées de D. Alors, d'une part :

$$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}x_D - x_B\\y_D - y_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-(-1)\\y-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+1\\y-3\end{pmatrix}$$

   et d'autre part, puisque : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1-0\\3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C - x_A\\y_C - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-0\\2-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, alors :

$$\left(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \begin{pmatrix}2x_{\overrightarrow{AB}} + x_{\overrightarrow{AC}}\\2y_{\overrightarrow{AB}} + x_{\overrightarrow{AC}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\times(-1)+2\\2\times 1+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

   Enfin, puisque $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, alors $\begin{pmatrix}x+1\\y-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, et :

$$\begin{array}{rcl} x+1 & = & 0\\ x & = & -1\\ x & = & -1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} y-3 & = & 2\\ y & = & 2+3\\ y & = & 5 \end{array}$$

   Les coordonnées de D sont donc $D\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$.

2. *Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?*

   Nous avons déjà calculé les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$. Calculons celles de $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x_D - x_C\\y_D - y_C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1-2\\5-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$. Ces vecteurs sont-ils colinéaires ? Calculons leur déterminant.

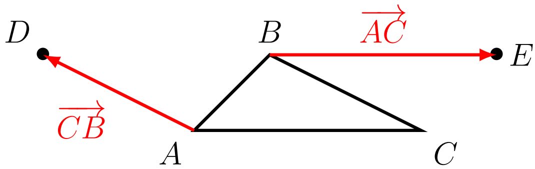
$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) &= \begin{vmatrix}-1 & -3\\1 & 3\end{vmatrix}\\ &= -1\times 3 - (-3)\times 1\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, et les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 4 (Quasiment hors-programme)**.** *On considère le triangle ABC, et les points D et E définis par : $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$.*
Le but de l'exercice est de montrer que B est le milieu de $[DE]$.

1. *Faire une figure.*

   Remarquons que puisque $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}$, alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$.



2. *Quelle propriété applique-t-on pour obtenir $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$?*

   Cette décomposition est donnée par la relation de Chasles.

3. *En déduire que $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{AC}$, et conclure.*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} \\
&= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\
&= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \\
&= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \\
&= 2\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

   Donc, puisque $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{AC}$ et que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$, alors $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{BE}$, et B est le milieu de $[DE]$.