Exercice 1. Corrigé en autonomie...

Exercice 2. *On cherche à résoudre l'inéquation :*

$$2x^2 + 18x - 13 \geqslant 15$$

1. *Montrer que résoudre cette inéquation revient à résoudre l'inéquation :*

$$(2x - 4)(-x + 7) \geqslant 0$$

D'une part, on a :

$$\begin{aligned} 2x^2 + 18x - 13 &\geqslant 15 \\ 2x^2 + 18x - 13 - 15 &\geqslant 0 \\ 2x^2 + 18x - 28 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Et d'autre part, on a :

$$\begin{aligned} (2x - 4)(-x + 7) &\geqslant 0 \\ 2x \times (-x) + 2x \times 7 + (-4) \times (-x) + (-4) \times 7 &\geqslant 0 \\ -2x^2 + 14x + 4x - 28 &\geqslant 0 \\ -2x^2 + 18x - 28 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Les deux inéquations sont équivalentes à $-2x^2 + 18x - 28 \geqslant 0$, donc elles sont équivalentes entre elles.

2. (a) *Dresser le tableau de signes des fonctions affines d'expression :* $2x - 4$ *et* $-x + 7$*.* Voir la question suivante.

   (b) *En déduire le tableau de signes de l'expression :* $(2x - 4)(-x + 7)$*.*

   La première fonction est affine de coefficient directeur 2 : elle est croissante, et change de signe en $-\frac{-4}{2} = 2$.

   La seconde fonction est affine de coefficient directeur -1 : elle est décroissante, et change de signe en $-\frac{7}{-1} = 7$.

x	$-\infty$		2		7		∞
$2x - 4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x + 7$		$+$		$+$	0	$-$	
$(2x-4)(-x+7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. *En déduire les solutions de l'inéquation de départ.*

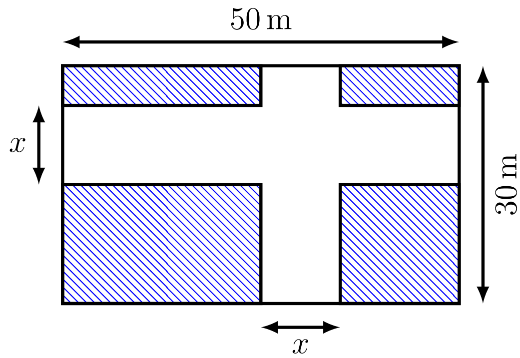
   D'après le tableau de signes, les solutions de $(2x-4)(-x+7) \geqslant 0$ sont $x \in [2;7]$, donc les solutions de $2x^2 + 18x - 13 \geqslant 15$ sont aussi : $\boxed{x \in [2;7]}$.

Exercice 3. *L'architecte d'un aquarium réfléchit au plan de l'une des salles, qui aura la forme ci-contre. C'est un rectangle de 30 m par 50 m, composée de quatre bassins rectangulaires aux quatre coins de la salle (en bleu sur la figure) ; les deux bandes blanches sont les allées pour les visiteurs.*

L'architecte a les contraintes suivantes :

- *il faut que la superficie de l'ensemble des bassins soit supérieure à 800 m² ;*
- *il faut que la superficie des allées soit supérieure à 375 m² .*

On appelle x (compris dans l'intervalle $[0;30]$) la largeur des allées, en mètres. L'objet de l'exercice est de déterminer quelles sont les valeurs possibles pour x pour que les deux contraintes soient respectées.



On appelle B la fonction qui à x associe l'aire des aquarium, et A la fonction qui à x associe l'aire des allées.

1. (a) *Calculer l'aire totale de la salle.*

La salle est un rectangle de côtés 50 m et 30 m, donc son aire est : $30 \times 50 = 1\,500\,\text{m}^2$.

(b) *Expliquer pourquoi $x \in [0;30]$.*

x est une longueur, qui ne peut donc pas être négative. De plus, si $x > 30$, alors l'allée est plus large que la salle, ce qui est impossible. Donc $x \in [0;30]$.

(c) *Montrer que pour tout $x \in [0;30]$, on a $A(x) = -x^2 + 80x$.*

L'allée horizontale a pour aire $50x$. L'allée verticale a pour aire $30x$. Mais en additionnant ces deux allées, on compte deux fois le carré central, d'aire x^2, qu'il faut donc retrancher. Donc :

$$A(x) = 50x + 30x - x^2 = -x^2 + 80x$$

(d) *En déduire que pour tout $x \in [0;30]$, on a $B(x) = x^2 - 80x + 1500$.*

L'aire des aquariums est l'aire totale, à laquelle il faut soustraire l'aire des allées. Donc :

$$\begin{aligned} B(x) &= 1500 - A(x) \\ &= 1500 - \left(-x^2 + 80x\right) \\ &= 1500 + x^2 - 80x \\ &= x^2 - 80x + 1500 \end{aligned}$$

2. *On s'intéresse à l'aire des bassins.*

(a) *Expliquer pourquoi $B(x) \geqslant 800$.*

D'après l'énoncé, l'aire des bassins doit être supérieure à 800, donc : $B(x) \geqslant 800$.

(b) *Montrer que résoudre $B(x) \geqslant 800$ est équivalent à résoudre : $x^2 - 80x + 700 \geqslant 0$.*

$$\begin{gathered} B(x) \geqslant 800 \\ x^2 - 80x + 1500 \geqslant 800 \\ x^2 - 80x + 1500 - 800 \geqslant 0 \\ x^2 - 80x + 700 \geqslant 0 \end{gathered}$$

(c) *Montrer que résoudre $B(x) \geqslant 800$ revient à résoudre :* $(x-10)\,(x-70$
0.

D'une part, nous avons montré à la question précédente que $B(x) \geqslant 800$ est équivalente à $x^2 - 80x + 700 \geqslant 0$.

D'autre part :

$$\begin{aligned}
(x-10)\,(x-70) &\geqslant 0 \\
x \times x + x \times (-70) + (-10) \times x + (-10) \times (-70) &\geqslant 0 \\
x^2 - 70x - 10x + 700 &\geqslant 0 \\
x^2 - 80x + 100 &\geqslant 0
\end{aligned}$$

Donc les deux inéquations sont équivalentes à $x^2 - 80x + 100 \geqslant 0$: elles sont équivalentes entre elles, et $B(x) \geqslant 800$ est équivalent à $(x-10)\,(x-70) \geqslant 0$.

(d) *Dresser le tableau de signes du produit $(x-10)\,(x-70)$, puis en déduire que $B(x) \geqslant 800$ si $x \leqslant 10$.*

La affine $x - 10$ est affine de coefficient directeur 1, donc croissante, et change de signe en $-\frac{-10}{1} = 10$.

La affine $x - 70$ est affine de coefficient directeur 1, donc croissante, et change de signe en $-\frac{-70}{1} = 70$.

x	$-\infty$		10		70		$+\infty$
$x - 10$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 70$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-10)(x-70)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc les solutions de $(x-10)(x-70) \geqslant 0$ sont $x \leqslant 10$ ou $x \geqslant 70$. Mais nous avons montré à la question 1b que $x \in [0; 30]$, donc le second ensemble de solutions $x \geqslant 70$ est à exclure : $x \in [0; 10]$.

3. *On s'intéresse à l'aire des allées.*

(a) *Expliquer pourquoi $A(x) \geqslant 375$, puis montrer que résoudre $A(x) \geqslant 375$ revient à résoudre : $(x-5)(x-75) \leqslant 0$.*

Puisque l'aire des allées doit être au moins $375\,\mathrm{m}^2$, alors $A(x) \geqslant 375$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
(x-5)(x-75) &\leqslant 0 \\
x \times x + x \times (-75) + (-5) \times x + (-5) \times (-75) &\leqslant 0 \\
x^2 - 75x - 5x + 375 &\leqslant 0 \\
x^2 - 80x + 375 &\leqslant 0 \\
375 &\leqslant -x^2 + 80x \\
375 &\leqslant A(x)
\end{aligned}$$

(b) *Dresser le tableau de signe de $(x-5)(x-75)$, puis en déduire les solutions de l'inéquation $A(x) \geqslant 375$.*

x	$-\infty$		5		75		∞
$x - 5$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 75$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-5)(x-75)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc les solutions de $(x-5)(x-75) \leqslant 0$ sont $x \in [5;75]$, et les solutions de $A(x) \geqslant 375$ sont également $x \in [5;75]$.

4. *Conclure : Quelles valeurs l'architecte peut-elle prendre pour la largeur des allées pour que les contraintes soient respectées ?*

Nous avons montré, d'une part, que $x \leqslant 10$, et d'autre part, que $x \in [5;75]$. Donc x doit être compris entre 5 et 10 : $\boxed{x \in [5;10]}$.

La largeur des allées doit être comprise entre 5 m et 10 m.