Faites un des deux « menus », au choix :

Menu 1 *Même genre que ce que vous aurez en devoir : exercices 1, 2, 3.*

Menu 2 *Si vous avez plutôt bien compris ce chapitre : exercices 1, 4, 5.*

Exercice 1 (Culture générale)**.** Citez une avancée mathématique (nouveau théorème, nouvelle conjecture, nouveau problème, etc.) réalisée après votre naissance.

Exercice 2. Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-2;1)$, $B(0;2)$, $C(2;3)$, $D(4;3)$, $E(8;5)$.

1. (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
   (b) Que représente le point B pour le segment $[AC]$? Justifier.
2. (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$.
   (b) Quelle est la nature du quadrilatère $ACED$?
3. (a) En utilisant la méthode de votre choix, déterminer les coordonnées d'un point F tel que $ABFD$ soit un parallélogramme (justifier votre réponse).
   (b) Sans nouveau calcul, justifier que $BCEF$ est aussi un parallélogramme.

Exercice 3. On donne les vecteurs $\overrightarrow{u}\binom{1{,}3}{8}$ et $\overrightarrow{v}\binom{-1{,}1}{4}$. On cherche les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{w}\binom{x}{y}$ tel que $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$.

1. Montrer que les coordonnées x et y vérifient $0,2+x=0$ et $12+y=0$.
2. En déduire les coordonnées de $\overrightarrow{w}$.

Exercice 4. On souhaite démontrer la propriété : « Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ ».
On considère trois points $A\binom{x_A}{y_A}$, $B\binom{x_B}{y_B}$, $C\binom{x_C}{y_C}$ dans un repère.
On suppose d'abord que $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$.

1. *Abscisses :*
   (a) Montrer que $x_I - x_A = x_B - x_I$.
   (b) En déduire que $x_I = \frac{x_A+x_B}{2}$.
2. *Ordonnées :* De même, montrer que $y_I = \frac{y_A+y_B}{2}$.

3. En déduire que I est le milieu de $[AB]$.

Nous venons de montrer que si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, alors I est le milieu de $[AB]$. Il faudrait encore montrer la réciproque (si I est le mileu de $[AB]$, alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$). On admet que tout le raisonnement fait dans cet exercice fonctionne aussi « à l'envers » pour prouver cette réciproque.

Exercice 5. On souhite démontrer la propriété : « $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ».

1. Montrons que si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
   On suppose que $ABCD$ est un parallélogramme, et on appelle I le milieu de la diagonale $[AC]$ (qui est donc aussi le milieu de la diagonale $[BD]$). Expliquer chacune des étapes du raisonnement suivant.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} && (1)\\
&= \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{DI} && (2)\\
&= \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IC} && (3)\\
&= \overrightarrow{DC} && (4)
\end{aligned}$$

2. Montrons que si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors $ABCD$ est un parallélogramme.
   Supposons que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Appelons I le milieu de $[AC]$. Montrons que I est aussi le milieu de $[BD]$.
   Expliquer chacune des étapes du raisonnement suivant.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DI} &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CI} && (5)\\
&= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CI} && (6)\\
&= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA} && (7)\\
&= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} && (8)\\
&= \overrightarrow{IB} && (9)
\end{aligned}$$

   Donc si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{IB}$, et I est le milieu de $[BD]$, donc les diagonales $[AC]$ et $[DB]$ ont le même milieu : $ABCD$ est un parallélogramme.