Exercice 1 (Inéquations). *Une usine de conditionnement de soupe reçoit du bouillon de la part d'un fournisseur, et des légumes en poudre de la part d'un autre fournisseur. Elle assemble les deux pour fabriquer sa soupe.*
Une cuve a été remplie avec 100 L de bouillon. L'objet de l'exercice est de déterminer la quantité de légumes à ajouter pour fabriquer la soupe, sachant que :

- *La cuve de bouillon contient déjà 50 g de sel, et 0 g de sucre.*
- *Chaque kilogramme de légumes en poudre contient 3,2 g de sel, et 1,4 g de sucre.*
- *La soupe (le bouillon mélangé aux légumes) doit contenir* au moins *150 g de sel (pour la conservation), et* au maximum *50 g de sucre (pour relever le goût).*

Dans la suite de l'exercice, tous les poids sont exprimés en grammes.

1. *On ajoute x kilogrammes de légumes dans le bouillon. Montrer que la quantité de sucre dans la soupe est $1,4x$, et que la quantité de sel est $50 + 3,2x$*

   Puisque chaque kilogramme x de légumes amène 1,4 g de sucre au bouillon qui n'en contient pas encore, la quantité de sucre est $1,4x$.

   Puisque le bouillon contient déjà 50 g de sel, et que l'on y ajoute 3,2 g par kilogramme x de légumes, la quantité de sel est alors $50 + 3,2x$.

2. *En déduire que pour respecter les contraintes, les relations suivantes doivent être respectées :*

   $$1,4x \leqslant 50 \text{ et } 50 + 3,2x \geqslant 150$$

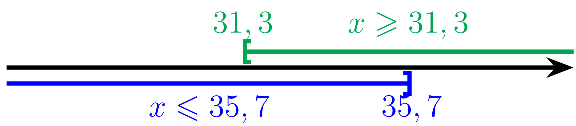
   La quantité de sucre doit être inférieure à 50 g, donc $1,4x \leqslant 50$.

   La quantité de sel doit être supérieure à 150 g, donc $50 + 3,2x \geqslant 150$.

3. *Résoudre les deux inéquations* $1,4x \leqslant 50$ *et* $50 + 3,2x \geqslant 150$, *et représenter les solutions sous la forme d'un seul intervalle.*

$$\begin{aligned} 1,4x &\leqslant 50 \\ x &\leqslant \frac{50}{1,4} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 50 + 3,2x &\geqslant 150 \\ 3,2x &\geqslant 100 \\ x &\geqslant \frac{100}{3,2} \end{aligned}$$

Cela donne, en arrondissant au dixième de gramme : $x \leqslant 35,7$ et $x \geqslant 31,3$.



Donc l'ensemble des solutions est $x \in [31,3; 35,7]$.

4. *Conclure par une phrase en français : Quel poids de légume peut-on verser dans la cuve de bouillon pour respecter les contraintes ?*
   Pour respecter les contraintes, on peut ajouter entre 31,3 g et 35,7 g de légumes.

Exercice 2 (Repérage)**.** *Dans un repère orthonormé, on considère les points* $A(-1; 2)$, $B(2; 6)$, $C(10; 0)$.

1. *Tracer un repère, et placer les points* A, B, C, *sur ce repère.* Voir en fin d'exercice.
2. (a) *Calculer les coordonnées du milieu* I *de* $[AC]$.
   Puisque I est le milieu de $[AC]$, alors :

$$x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1+10}{2} = \frac{9}{2} = 4,5 \qquad y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$$

Donc les coordonnées du milieu I sont $D\,(4{,}5; 1)$.

(b) *Déterminer les coordonnées de D, symétrique de B par rapport à I.*

Puisque D est le symétrique de B par rapport à I, alors I est le milieu de $[BD]$, donc :

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{x_B + x_D}{2} \\ 4,5 &= \frac{2 + x_D}{2} \\ 2 \times 4,5 &= 2 + x_D \\ 9 &= 2 + x_D \\ 9 - 2 &= x_D \\ 7 &= x_D \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_I &= \frac{y_B + y_D}{2} \\ 1 &= \frac{6 + y_D}{2} \\ 2 \times 1 &= 6 + y_D \\ 2 &= 6 + y_D \\ 2 - 6 &= y_D \\ -4 &= y_D \end{aligned}$$

Donc les coordonnées de D sont $D\,(7; -4)$.

(c) *En déduire que $ABCD$ est un parallélogramme.*

Puisque I est à la fois le milieu de $[AC]$ et $[BD]$, alors les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent en leur milieu : $ABCD$ est un parallélogramme.

3. (a) *On admet que $AB = 5$ et $AC = 5\sqrt{5}$. Calculer la longueur BC.*

$$
\begin{aligned}
BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \\
&= \sqrt{(10 - 2)^2 + (0 - 6)^2} \\
&= \sqrt{8^2 + (-6)^2} \\
&= \sqrt{64 + 36} \\
&= \sqrt{100} \\
&= 10
\end{aligned}
$$

(b) *Montrer que le triangle ABC est rectangle en B.*

Vérifions si le triangle est rectangle en utilisant la réciproque du théorème de Pythagore.

— D'une part : $AC^2 = \left(5\sqrt{5}\right)^2 = 5^2 \times \sqrt{5}^2 = 25 \times 5 = 125$.

— D'autre part : $AB^2 + BC^2 = 5^2 + 10^2 = 25 + 100 = 125$.

Donc $AC^2 + AB^2 + BC^2$, et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

(c) *Préciser la nature du parallélogramme $ABCD$ (est-ce un rectangle ? un losange ? un carré ? un parallélogramme quelconque ?).*

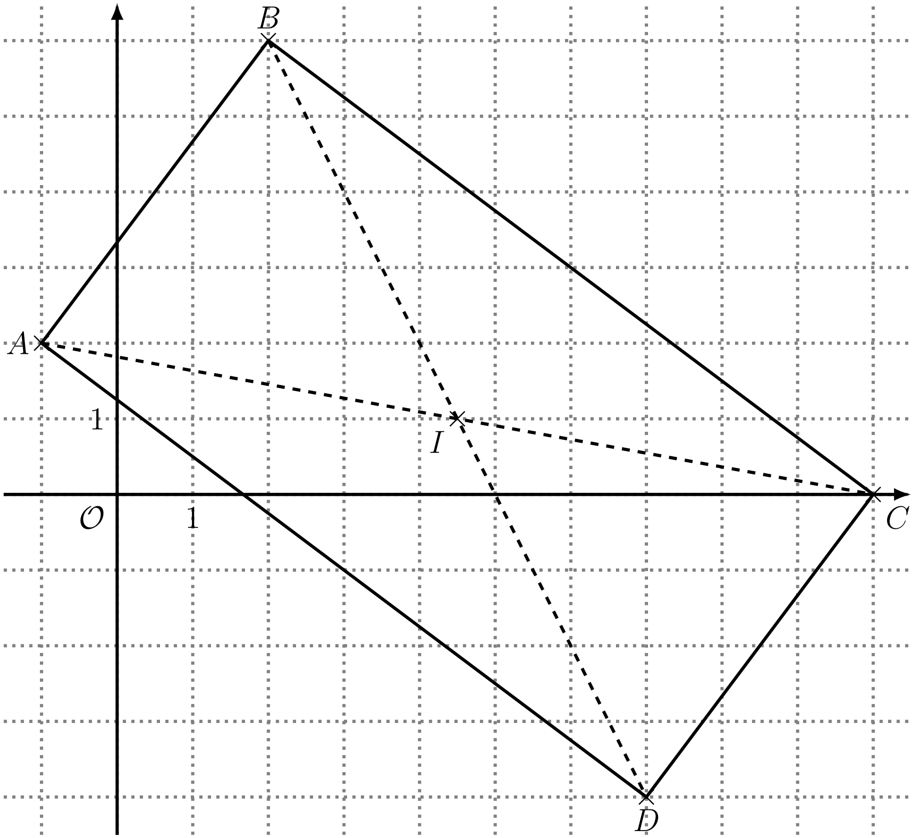
— Nous avons déjà dit que $ABCD$ est un parallélogramme.

— Puisque le triangle ABC est rectangle en B, alors l'angle $\widehat{ABC}$ est droit, et $ABCD$ est un rectangle.

— Puisque $AB \neq BC$, alors les quatre côtés du parallélogramme ne sont pas égaux : ce n'est pas un losange.

4. *Sans aucun calcul (mais toujours sans lecture graphique), dire si les droites $[AC]$ et $[BD]$ sont perpendiculaires.*

D'après la question précédente, $ABCD$ n'est pas un losange, donc ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ne sont pas perpendiculaires.


B
A
1
I
O
1
C
D