Exercice 1. *Des professeurs de sport organisent un rallye pour des élèves de collège et de lycéee d'une ville. Pour que les équipes soient équilibrées, ils font en sorte que chaque équipe soit composée du même nombre de collégiens, et du même nombre de lycéens. Ils veulent constituer le plus d'équipes possibles. Il y a 108 collégiens et 48 lycéens qui participent.*

1. *Expliquer pourquoi le nombre d'équipes doit être un diviseur commun à 108 et 48. Pourquoi ce nombre doit-il être le* plus grand *diviseur commun ?*

   Si on connait le nombre d'équipes, pour calculer le nombre de collégiens par équipe, on va calculer : $\dfrac{108}{\text{nombre d'équipes}}$. Il faut donc que le nombre d'équipes divise 108. De même, il faut que le nombre d'équipe divise 48.

   De plus, comme on veut le plus d'équipes possibles, il faut que ce diviseur soit le plus grand possible.

2. *Calculer le PGCD de 108 et 48.*

Méthode 1 : Avec l'algorithme d'Euclide

$$108 = 48 \times 2 + 12$$
$$48 = 12 \times 4 + 0$$

Le PGCD de 108 et 48 est donc 12.

Méthode 2 : En décomposant en produit de facteurs premiers

$$\begin{array}{r|l} 108 & \boxed{2} \\ 54 & \boxed{2} \\ 27 & \boxed{3} \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{r|l} 48 & \boxed{2} \\ 24 & \boxed{2} \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & \boxed{3} \\ 1 & \end{array}$$

Donc $108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^3$ et $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3$.

Les facteurs communs de 108 et 48 sont donc 2 (deux fois) et 3 (une fois). Donc le PGCD de 108 et 48 est $2^2 \times 3 = 12$.

3. *Combien y a-t-il d'équipes, et de combien de collégiens et lycéens sont-elles constituées ?*

   Nous avons dit à la première question que le nombre d'équipe est le PGCD. Il y a donc 12 équipes, chacune composée de $108 \div 12 = 9$ collégiens et $48 \div 12 = 4$ lycéens.

Exercice 2. *En détaillant les calculs, simplifier (si possible) la fraction suivante.*

$$A = \frac{1234}{5678}$$

Méthode 1 : Avec l'algorithme d'Euclide

$$\begin{aligned} 5678 &= 1234 \times 4 + 742 \\ 1234 &= 742 \times 1 + 492 \\ 742 &= 492 \times 1 + 250 \\ 492 &= 250 \times 1 + 242 \\ 250 &= 242 \times 1 + 8 \\ 242 &= 8 \times 30 + 2 \\ 8 &= 2 \times 4 + 0 \end{aligned}$$

Le PGCD de 1234 et 5678 est donc 2. Donc :

$$A = \frac{1234}{5678} = \frac{1234 \div 2}{5678 \div 2} = \frac{617}{2839}$$

Méthode 2 : En décomposant en produit de facteurs premiers

Remarque : Je n'ai pas fait attention en préparant ce sujet, et les facteurs trouvés ici sont trop gros. Pour le devoir, je ferai en sorte que les facteurs *soient plus petits (comme à la question 2 de l'exercice 1).*

$$\begin{array}{r|l} 1234 & 2 \\ 617 & 617 \\ 1 & \\ & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 5678 & 2 \\ 2839 & 17 \\ 167 & 167 \\ 1 & \end{array}$$

Donc $1234 = 617 \times 1$ et $5678 = 167 \times 17 \times 2$. Le seul facteur commun est donc 2. Le PGCD de 1234 et 5678 est donc 2. Donc :

$$A = \frac{1234}{5678} = \frac{1234 \div 2}{5678 \div 2} = \frac{617}{2839}$$

Exercice 3. *Afin de lutter contre une chenille s'attaquant à une plante, on a développé un insecticide dont on cherche à évaluer l'efficacité. On a planté un grand nombre de ces plantes, dont certaines ont été traitées avec l'insecticide, et d'autres non. On a ensuite observé lesquelles étaient attaquées par la chenille. On a obtenu les valeurs suivantes.*

- *37% des plantes ont été attaquées par la chenille ;*
- *50% des plantes ont été traitées à l'insecticide ;*
- *11% des plantes ont été traitées à l'insecticide et ont été attaquées par la chenille.*

1. *Compléter le tableau suivant avec des pourcentages.*

   Les nombres en rouges sont ceux qui ont été lus dans l'énoncés (et le 100% qui apparait toujours à la ligne Total et la colonne Total), les autres ont été calculés.

		Insecticide		
		Oui	Non	**Total**
Chenille	Oui	11	26	37
	Non	39	24	63
Total		50	50	100

2. *On choisit une plante au hasard, et on nomme les évènements suivants :*
   - *I : la plante a été traitée avec l'insecticide ;*
   - *C : la plante a été attaquée par la chenille.*

(a) *Quelle est la probabilité que la plante ait été traitée avec l'insecticide et soit quand même attaquée par la chenille ?*

On lit dans le tableau la ligne « Chenille : Oui » et « Insecticide : Oui ». La probabilité est donc 11% (ou 0,11).

(b) *À quoi correspond l'évènement $C \cup I$? Calculer sa probabilité.*

Cet évènement correspond à « La plante a été attaquée par la chenille ou a été traitée à l'insecticide. »

Pour calculer cette probabilité, on ajoute dans le tableau les probabilités des cases des lignes « Chenille : oui », ou « Insecticide : oui » (ou les deux), mais pas les ligne et colonne « Total ». Cela donne :

$$P(C \cup I) = (11 + 26 + 39)\,\% = 76\%$$

Exercice 4. *Une usine de fabrication de lampe reçoit ses interrupteurs de deux fournisseurs différents, A et B. Certains des interrupteurs présentent un défaut.*

On prend un interrupteur au hasard, et on note les évènements suivants :

- A *: « L'interrupteur vient du fournisseur A ».*
- B *: « L'interrupteur vient du fournisseur B ».*
- D *: « L'interrupteur présente un défaut. ».*

On connait les probabilités suivantes :

- $P(A) = 0,72$;
- $P(D) = 0,03$;
- $P(A \cap D) = 0,01$.

1. *Décrire par une phrase chacun des évènements suivants (on ne demande pas de calculer leur probabilité) :*

   (a) $A \cap D$: L'interrupteur vient du fournisseur A et présente un défaut.

   (b) $\overline{D}$: L'interrupteur ne présente pas de défaut.

2. *On choisit un interrupteur au hasard.*

   (a) *Calculer* $P\left(\overline{D}\right)$.

$$P\left(\overline{D}\right) = 1 - P(D) = 1 - 0,03 = 0,97$$

(b) *Calculer $P(A \cup D)$.*

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) = 0,72 + 0,03 - 0,01 = 0,74$$

Exercice 5. *On a un dé à quatre faces (numérotées de 1 à 4) truqué. On l'a lancé un grand nombre de fois, et on a observé que :*

- *la probabilité d'obtenir un nombre pair est égale à la probabilité d'obtenir un nombre impair ;*
- *la probabilité d'obtenir 4 est 0,4 ;*
- *il y a quatre fois plus de chance d'obtenir 3 que d'obtenir 1.*

Compléter la loi de probabilité suivante (en justifiant).

Face	1	2	3	4
Probabilité				

Dans toute la suite, pour alléger l'écriture, on notera $P(1)$ plutôt que P(« Obtenir 1 (de même pour chacun des autres nombres).
Puisque les probabilités d'obtenir un nombre pair et impair sont égales, cela signifie que chacune des probabilités est égale à 0,5. Donc :

$$\begin{aligned}
P(\text{« Obtenir un nombre pair »}) &= 0,5 \\
P(\text{« Obtenir 2 ou 4 »}) &= 0,5 \\
P(2) + P(4) &= 0,5 \\
P(2) + 0,4 &= 0,5 \\
P(2) &= 0,5 - 0,4 \\
P(2) &= 0,1
\end{aligned}$$

Remarque : On a pu écrire $P(\text{« Obtenir 2 ou 4 »}) = P(\text{« Obtenir 2 »}) + P(\text{« Obtenir 4 »})$ car l'évènement « Obtenir 2 ou 4 » est composé des deux issues « Obtenir 2 » et « Obtenir 4 », et la probabilité d'un évènement est égal à la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le composent.
Calculons maintenant les deux probabilités restantes.

On a :

$$\begin{aligned} P\left(\text{« Obtenir un nombre impair »}\right) &= 0,5 \\ P\left(\text{« Obtenir 1 ou 3 »}\right) &= 0,5 \\ P\left(1\right) + P\left(3\right) &= 0,5 \end{aligned}$$

Or il est dit dans l'énoncé qu'il y a quatre fois plus de chances d'obtenir 3 que 1. En d'autres termes : $P\left(3\right) = 4 \times P\left(1\right)$. Donc en remplaçant $P\left(3\right)$ par cette expression dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} P(1) + 4 \times P(1) &= 0,5 \\ 5 \times P(1) &= 0,5 \\ P(1) &= 0,5 \div 5 \\ P(1) &= 0,1 \end{aligned}$$

Et donc : $P(3) = 4 \times P(1) = 4 \times 0,1 = 0,4$.
La loi de probabilités est donc :

Face	1	2	3	4
Probabilité	$0,1$	$0,1$	$0,4$	$0,4$