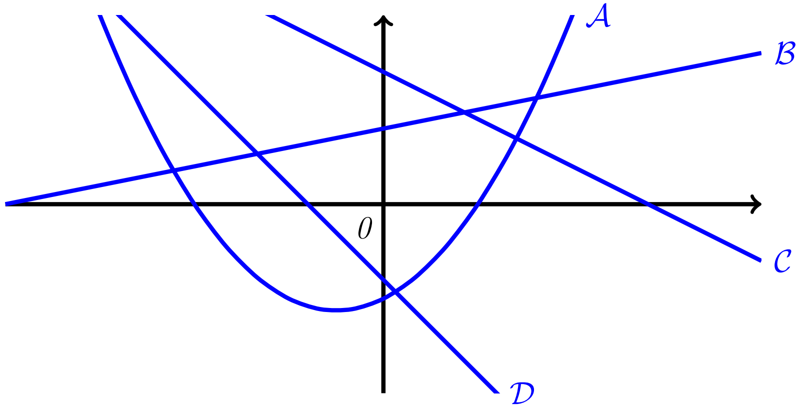
Exercice 1 (2 points). *Sur le repère suivant, dont l'échelle est inconnue, quatre courbes ont été tracées. Laquelle correspond à la fonction définie par $f(x) = -2x + 6$? Justifier.*



Méthode 1 Puisque la fonction f est affine, sa représentation graphique est une droite, ce qui exclut la courbe $\mathcal{A}$.

Puisque son coefficient directeur -2 est négatif, elle est décroissante, ce qui exclut la courbe $\mathcal{B}$.

Son ordonnée à l'origine est 6, donc sa courbe coupe l'axe des ordonnée en 6, au dessus de l'axe des abscisses. Cela exclut la courbe $\mathcal{D}$.

C'est donc la courbe $\mathcal{C}$.

Méthode 2 La fonction f est une fonction affine strictement décroissante (car son coefficient directeur est négatif) qui change de signe en $-\frac{6}{-2} = 3$. Son tableau de signes est donc le suivant.

x	$-\infty$		3		∞
$-2x+6$		$+$	0	$-$	

Sa courbe devrait donc être d'abord au dessus de l'axe des abscisses, puis couper l'axe des abscisses en 3 (donc à droite de l'axe des ordonnées), puis être sous l'axe des abscisses. La seule courbe qui correspond à cette description est la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 2 (5 points)**.** *Selon l'INSEE[1], en 1986, les femmes consacraient environ 5h par jour aux tâches domestiques (ménage, cuisine, s'occuper des enfants…), contre 4h environ en 2010, tandis que le temps consacré aux mêmes tâches par les hommes est passé de 2h à 2,25h environ sur la même période.*
On modélise cette évolution par deux fonctions affines :

— *on appelle f la fonction affine qui à l'année associe le nombre d'heures consacrées par les femmes aux tâches domestiques (par exemple, $f(2020)$ est le nombre d'heures consacrées par les femmes aux tâches domestiques en 2020) ;*

— *on appelle h la même fonction, mais pour les hommes.*

On arrondira toutes les valeurs à quatre décimales après la virgule.

1. *En remarquant que $f(1986) = 5$ et $f(2010) = 4$, montrer que l'expression de f est $f(x) = -0,0417x + 87,75$.*
   La fonction f est affine, donc son expression est de la forme $f(x) = ax + b$. Commençons par déterminer a.

$$a = \frac{f(1986) - f(2010)}{1986 - 2010} = \frac{5-4}{1986-2010} = \frac{1}{-24} \approx -0,0417$$

   L'expression de f est donc $f(x) = -0,0417x + b$. Or, puisque $f(2010) = 4$, alors :

$$\begin{aligned} f(2010) &= 4 \\ -0,0417 \times 2010 + b &= 4 \\ b &= 4 + 0,0417 \times 2010 \\ b &\approx 87,817 \end{aligned}$$

1. *En 25 ans, moins de tâches domestiques pour les femmes, l'écart de situation avec les hommes se réduit*, Layla Ricroch, INSEE, mars 2012.

L'expression de f est donc $\boxed{f(x) = -0,0417x + 87,817}$ environ.
Remarquons qu'à cause d'erreurs d'arrondis, on ne trouve pas exactement le même résultat que la valeur demandée, mais on comme expliqué pendant le contrôle, on s'en contentera.

De même, on admet que l'expression de h est $h(x) = 0,0104x - 18,6875$.

2. *Résoudre $h(x) \geqslant f(x)$.*

$$\begin{aligned} h(x) &\geqslant f(x) \\ 0,0104x - 18,6875 &\geqslant -0,0417x + 87,75 \\ 0,0104x + 0,0417x &\geqslant 87,75 + 18,6875 \\ 0,0521x &\geqslant 106,4375 \\ x &\geqslant \frac{106,4375}{0,0521} \\ x &\geqslant 2042,9 \end{aligned}$$

3. *Si ce modèle est correct, à partir de quelle année les hommes passeront autant ou plus de temps que les femmes à faire des tâches domestiques ?*

   Puisque les solutions de $h(x) \geqslant f(x)$ sont $x \geqslant 2042,9$ environ, si ce modèle est correct, les hommes passeront autant ou plus de temps par jour que les femmes à faire des tâches domestiques à partir de l'année 2043.

Exercice 3 (5 points)**.** *L'objet de l'exercice est de résoudre l'équation $-6x^2 + 27x - 30 \geqslant 0$.*

1. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $-6x^2 + 27x - 30 = (-2x + 5)(3x - 6)$.*

   Vous ne savez pas encore passer de la forme développer de cette expression du second degré à la forme factorisée (de gauche à droite), donc nous allons développer la forme factorisée (de droite à gauche).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}(-2x+5)(3x-6) &= -2x \times 3x - 2x \times (-6) + 5 \times 5x + 5 \times (-6)\\ &= -6x + 12x + 25x - 30\\ &= -6x + 37x - 30\end{aligned}$$

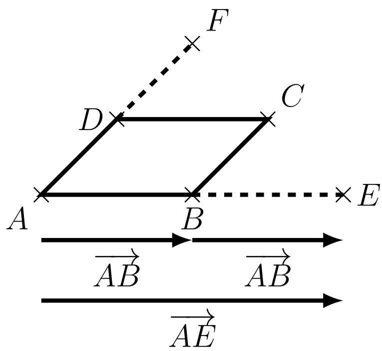
2. *Recopier et compléter le tableau de signes suivant.*
   Puisque l'expression $-2x+5$ est celle d'une fonction affine de coefficient directeur -2 et d'ordonnée à l'origine 5, alors elle est strictement décroissante (donc positive, puis négative), et change de signe en $-\frac{5}{-2} = 2,5$.

x	$-\infty$		2		2,5		∞
$-2x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x - 6$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-2x+5)(3x-6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. *En déduire les solutions de $-6x^2 + 27x - 30 \geqslant 0$.*
   D'après la première questions, résoudre $-6x^2 + 27x - 30 \geqslant 0$ est équivalent à résoudre $(-2x+5)(3x-6) \geqslant 0$. D'après la seconde question, les solutions sont : $\boxed{x \in [2; 2,5]}$

Exercice 4 (4 points)**.** *On considère un parallélogramme $ABCD$, et on construit le point E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ et F tel que D soit le milieu de $[FA]$.*
On souhaite montrer que C est le milieu de $[EF]$.

1. *Faire une figure.*



2. *Justifier que $\overrightarrow{FA} = 2\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{DC}$.*
   Puisque D est le milieu du segment $[FA]$, alors $\overrightarrow{FA} = 2\overrightarrow{FD}$.
   Par construction, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$. Or $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, et donc $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{DC}$.

On peut alors faire le raisonnement suivant :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{FE} &= \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE} && \textit{Relation de Chasles}\\
&= 2\overrightarrow{FD} + 2\overrightarrow{DC} && \textit{Question } \textbf{??}\\
&= 2\left(\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DC}\right) && \textit{Factorisation}\\
&= 2\overrightarrow{FC} && \textit{Relation de Chasles}
\end{aligned}$$

3. *Quelle est la position de C par rapport au segment $[FE]$? Justifier.*
   Nous avons montré que $\overrightarrow{FE} = 2\overrightarrow{FC}$, donc C est le milieu de $[FE]$.

Exercice 5 (4 points)**.** *Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $A\binom{-1}{0}$, $B\binom{5}{3}$, $C\binom{9}{2}$, et le vecteur $\overrightarrow{u}\binom{4}{5}$.*
On construit le point D tel que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{u}$.

1. *Montrer que les coordonnées de D sont $D\binom{17}{12}$.*

   D'une part, puisque $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{u}$, et que les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ sont $\overrightarrow{u}\binom{4}{5}$, alors les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$ sont $\overrightarrow{CD}\binom{2\times 4}{2\times 5} = \binom{8}{10}$.

D'autre part, appelons $D\binom{x}{y}$ les coordonnées de D. Alors les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$ sont : $\overrightarrow{CD}\binom{x_D - x_C}{y_D - y_C} = \binom{x-9}{y-2}$.
Donc :

$$\begin{array}{rcl} x-9 & = & 8 \\ x & = & 8+9 \\ x & = & 17 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} y-2 & = & 10 \\ y & = & 10+2 \\ y & = & 12 \end{array}$$

Ainsi, les coordonnées de D sont $D\binom{17}{12}$.

2. *Les points A, B, D sont-ils alignés ? Justifier.*
D'une part, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \binom{5-(-1)}{3-0} = \binom{6}{3}$.
D'autre part, les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$ sont $\overrightarrow{AD}\binom{x_D - x_A}{y_D - y_A} = \binom{17-(-1)}{12-0} = \binom{18}{12}$.
Vérifions si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires :

$$\det\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right) = 6 \times 12 - 3 \times 18 = 72 - 54 = 18 \neq 0$$

Donc le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ n'est pas nul, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires, et donc les points A, B, D ne sont pas alignés.