- *Fonctions paires et impaires : Faire un des deux exercices 1 ou 2 au choix (l'exercice 1 est plus difficile).*
- *Équations : Faire un des deux exercices 4 ou 5 au choix (l'exercice 4 est plus difficile).*
- *Les exercices 3 et 6 sont obligatoires.*

Exercice 1. Dans cet exercice, on va prouver la propriété :

> Si une fonction f a sa courbe représentative symétrique par rapport à l'origine, alors elle est impaire.

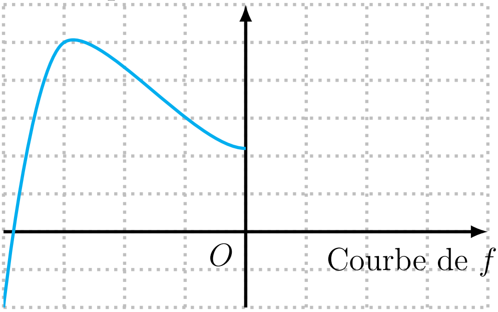
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dont la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère. Soit M un point de la courbe, d'abscisse x, et N son symétrique par rapport à l'origine.
Remarquez bien qu'à ce stade, on ne sait pas encore que la fonction est impaire, donc on ne peut pas utiliser la propriété $f(-x) = -f(x)$: il faudra la prouver.

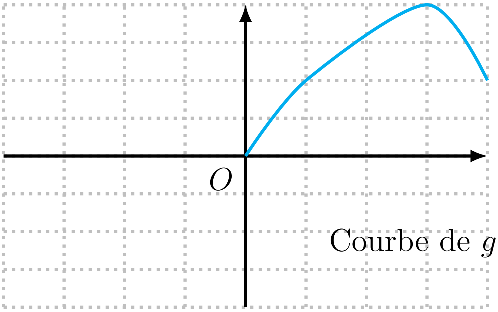
1. Rappelez les coordonnées de l'origine O du repère.
2. Rappelez pourquoi les coordonnées de M sont $(x; f(x))$.
3. *Les deux questions sont indépendantes.*
   (a) Montrez que les coordonnées de N (symétrique de M par rapport à l'origine O du repère) sont $N\left(-x; -f(x)\right)$
   (b) Rappelez pourquoi N est sur la courbe de la fonction f, et en déduire que $f(-x) = -f(x)$.
4. *Bilan :* En déduire que f est impaire.

Exercice 2. Dans cet exercice, on va montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \frac{x^2+1}{x}$ est impaire, mais pas paire.

1. Calculer $f(4)$ et $f(-4)$. La fonction f est-elle paire ?
2. Soit x un nombre réel quelconque.
   (a) Justifiez que $(-x)^2 = x^2$.
   (b) Montrez que $f(-x) = -\frac{x^2+1}{x}$.
   (c) En déduire que la fonction f est impaire.
3. La courbe de f est-elle symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ? par rapport à l'origine ?

Exercice 3 (Obligatoire)**.** Les courbes des fonctions f et g sont partiellement représentées ci-dessous.





1. Complétez la courbe de f, sachant que cette fonction est *paire*.
2. Complétez la courbe de g, sachant que cette fonction est *impaire*.

Exercice 4. On considère les fonctions f et g définies sur l'ensemble $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{x} \text{ et } g(x) = x + 1$$

Les trois questions sont indépendantes.

1. Quels sont les antécédents de $2,4$ par g ?
2. Résoudre $f(x) = 10$.
3. Résoudre $f(x) = g(x)$.

Exercice 5. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 - 3 \text{ et } g(x) = x^2 - 5x$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à :

$$(2x - 1)(x + 3) = 0$$

2. En déduire les solutions de $f(x) = g(x)$.

Exercice 6 (Obligatoire — Culture générale)**.** Citez un problème ouvert en mathématiques (c'est-à-dire un problème que personne au monde ne sait résoudre).