COLINÉARITÉ
CORRIGÉ

Exercice 1 (Application directe). *Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne* $B\binom{-2}{60}$, $C\binom{87}{5}$ *et* $D\binom{32}{39}$.

1. *Lecture graphique*

   (a) *Dans un repère orthonormé allant de -5 à 90 en abscisses, et de 0 à 60 en ordonnées, placer les trois points (pensez à prendre une échelle adaptée).*

   (b) *Pensez-vous que les trois points B, C, D sont alignés ?* Les trois points B, C, D semblent alignés.

2. *Par le calcul*

   (a) *Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$.*

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87-(-2) \\ 5-60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 89 \\ -55 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32-87 \\ 39-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -55 \\ 34 \end{pmatrix}$$

(b) *Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ?* Vérifions la condition de colénéarité.

$$89 \times 43 - (-55) \times (-55) = 802 \neq 0$$

Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

(c) *Les points B, C et D sont-ils alignés ?* Puisque $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$, les trois points B, C, D ne sont pas alignés. Remarque : Ils sont *presque* alignés, c'est pour cela que nous avons donné la mauvaise réponse par lecture graphique.

Exercice 2. *Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère deux vecteurs de coordonnées $\overrightarrow{u}\binom{2}{x}$ et $\overrightarrow{v}\binom{x}{18}$, où x est un nombre à déterminer.*

1. *Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x^2 - 36 = 0$.* Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si la condition de colinéarité est respectée, c'est-à-dire si :

$$\begin{aligned} x \times x - 2 \times 18 &= 0 \\ x^2 - 36 &= 0 \end{aligned}$$

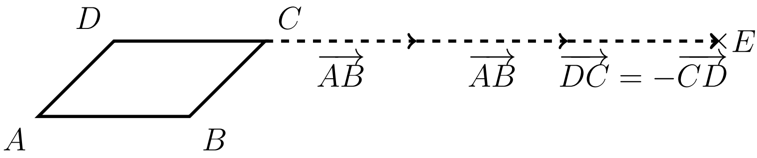
2. *En déduire les valeurs de x pour lesquelles les deux vecteurs sont colinéaires.* D'après la question précédente, les deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si $x^2 - 36 = 0$, c'est-à-dire si :

$$\begin{gathered} x^2 - 36 = 0 \\ x^2 = 36 \\ x = \sqrt{36} \text{ ou } x = -\sqrt{36} \\ x = 6 \text{ ou } x = -6 \end{gathered}$$

Les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont donc colinéaires si $x = 6$ ou $x = -6$.

Exercice 3. *Soit $ABCD$ un parallélogramme, et E un point tel que $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$.*

1. *Faire une figure.*



2. *Montrer que $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{AB}$.* Commençons par la définition de $\overrightarrow{CE}$ donnée dans l'énoncé.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CE} &= 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} \\
&= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \text{ car } \overrightarrow{-CD} = \overrightarrow{DC} \\
&= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \text{ car } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\
&\qquad\qquad \text{car } ABCD \text{ est un parallélogramme} \\
&= 3\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

3. *En déduire que les droites (CE) et (AB) sont parallèles.* Puisque $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{AB}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, et les droites (AB) et (CE) sont parallèles.

Exercice 4. *Dans le plan muni d'un repère, on considère trois points $A(0;2)$, $B(-1;3)$ et $C\,(2;2)$, ainsi qu'un quatrième point D tel que $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.*

1. *Montrer que les coordonnées de D sont $\binom{-1}{5}$.* Commençons par calculer les coordonnées de $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1-0 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2-0 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc calculer les coordonnées de $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}&\begin{pmatrix}2x_{\overrightarrow{AB}}+x_{\overrightarrow{AC}}\\2y_{\overrightarrow{AB}}+y_{\overrightarrow{AC}}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2\times(-1)+2\\2\times 1+0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

D'autre part, les coordonnées de $\overrightarrow{BD}$ sont :

$$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}x_D-x_B\\y_D-y_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_D-(-1)\\y_D-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_D+1\\y_D-3\end{pmatrix}$$

Enfin, puisque $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, les deux vecteurs ont les mêmes coordonnées.

$$\begin{aligned}x_D+1&=0 & \qquad y_D-3&=2\\x_D&=0-1 & y_D&=2+3\\x_D&=-1 & y_D&=5\end{aligned}$$

Les coordonnées de D sont donc $D\binom{-1}{5}$.

2. *Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?*
D'une part, nous avons déjà calculé que $\overrightarrow{AB}\binom{-1}{1}$. D'autre part, on a $\overrightarrow{CD}\binom{x_D-x_C}{y_D-y_C}=\binom{-1-2}{5-2}=\binom{-3}{3}$.
Vérifions la condition de colinéarité : $-1\times 3-1\times(-3)=-3+3=0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.