17/10 | **Arithmétique** | 2^{nde}

DM n° 2 | **Valeur absolue**

Arithmétique — Valeur absolue

Faire un des deux exercices 1 et 2 (l'exercice 1 est plus difficile). Les exercices 3 et 4 sont obligatoires.

Exercice 1. On souhaite démontrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (c'est-à-dire que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel). Nous allons prouver cela par l'absurde, c'est-à-dire en supposant que $\sqrt{2}$ *est* un nombre rationnel, et en montrant que l'on arrive à une contradiction.
Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Alors il est possible d'écrire $\sqrt{2}$ sous la forme d'une fraction irréductible : $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ (a et b étant deux nombres entiers premiers entre eux, car la fraction est irréductible).

1. Puisque $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, alors $\sqrt{2}^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$. En déduire que $2b^2 = a^2$.
2. Justifier que a^2 est pair, puis en citant un théorème du cours, justifier que a est aussi un nombre pair.

Puisque a est un nombre pair, il existe un nombre a' tel que $a = 2a'$, donc $\sqrt{2} = \frac{2a'}{b}$, et $\sqrt{2}^2 = \left(\frac{2a'}{b}\right)^2$.

3. En déduire que $b^2 = 2a'^2$.
4. En déduire que b^2 est un nombre pair, puis, en citant un théorème du cours, que b est aussi un nombre pair.
5. Nous venons de prouver que a est un nombre pair (question 2) et que b est aussi un nombre pair (question 4). Pourquoi est-ce une contradiction ?
6. Conclure en justifiant que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 2. On souhaite démontrer le théorème suivant :

> Si deux nombres sont multiples de a, alors leur somme est aussi multiple de a.

Soient b et c deux multiples d'un nombre entier a.

1. Expliquer pourquoi il existe deux nombres k et l tels que $b = k \times a$ et $c = l \times a$.
2. Montrer que $b + c = K \times a$ (où K est un nombre à déterminer en fonction de k et l).
3. En déduire que la somme de deux multiples de a est un multiple de a.

Exercice 3 (Valeur absolue)**.**

1. Résoudre les inéquations suivantes en donnat les solutions sous la forme d'un intervalle, ou d'une union d'intervalles disjoints.
   (a) $|x - 3| \leqslant 7$;
   (b) $|x + 2| \leqslant 20$;
   (c) $|x - 7| \leqslant 10$ et $|x - 12| \leqslant 5$.
2. *Les questions suivantes sont difficiles (plus que ce sur quoi vous serez évalués en devoir) : essayez de les résoudre, mais ne vous découragez pas si vous n'y arrivez pas.*
   (a) Quelles sont les deux solutions de l'équation $|x| = 18$?
   (b) Justifier que l'équation $|x + 2| = -3$ n'a pas de solutions.
   (c) Quelles sont les deux solutions de l'équation $|4,5 - x| = 27,2$?
   (d) Résoudre l'énéquation $|x - 23| \geqslant 10$ (attention au sens de l'inégalité).

Exercice 4 (Culture générale)**.** Citer un mathématicien, et dire en deux ou trois phrases pourquoi il est connu.