VECTEURS
SECOND DEGRÉ

Exercice 1. *Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $A(2;8)$, $B(-1;0)$, et $C(0;2)$. Déterminer les coordonnées d'un quatrième point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.*
Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Appelons $\binom{x}{y}$ les coordonnées de D. Alors :

- $\overrightarrow{AB}\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \binom{-1-2}{0-8} = \binom{-3}{-8}$.
- $\overrightarrow{DC}\binom{x_C - x_D}{y_C - y_D} = \binom{0-x}{2-y} = \binom{-x}{2-y}$.

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux, alors leurs coordonnées sont égales, et $-3 = -x$ et $-8 = 2 - y$. Donc $x = 3$, et $y = 10$. Les coordonnées de D sont donc $D\binom{3}{10}$.

Exercice 2. *Dans le plan muni d'un repère, on considère trois points $A(0;2)$, $B(-1;3)$ et $C\,(2;2)$, ainsi qu'un quatrième point D tel que $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.*

1. *Montrer que les coordonnées de D sont $\binom{-1}{5}$.*

   Commençons par calculer les coordonnées de $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
   — D'une part, $\overrightarrow{AB}\binom{-1-0}{3-2} = \binom{-1}{1}$.
   — D'autre part, $\overrightarrow{AC}\binom{2-0}{2-2} = \binom{2}{0}$.

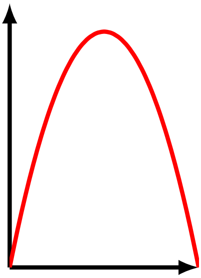
   Donc les coordonnées de $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ sont $\binom{2\times(-1)+2}{2\times 1+0} = \binom{0}{2}$.
   Enfin, puisque $\overrightarrow{BD}\binom{x-(-1)}{y-3} = \binom{x+1}{y-3}$, alors $x+1 = 0$ et $y-3 = 2$, soit $x = -1$ et $y = 5$: donc $D\binom{-1}{5}$.
2. *Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?* Nous avons calculé à la question précédente que $\overrightarrow{AB}\binom{-1}{1}$. D'autre part, $\overrightarrow{CD}\binom{-1-2}{5-2} = \binom{-3}{3}$. Vérifions la condition de colinéarité :

$$-3 \times 1 - (-1) \times 3 = -3 + 3 = 0$$

Donc la condition de colinéarité est vérifiée, et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, et les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 3. *Toutes les mesures sont données en mètres.*

Un ballon est lancé en l'air. On modélise sa trajectoire par la fonction $f : x \mapsto -x^2+5x$, où x est la distance (au sol) par rapport au point de départ (situé à l'origine, de coordonnées $(0,0)$), et $f(x)$ est l'altitude. Cette trajectoire est représentée ci-contre (mais cette représentation n'est pas à l'échelle).



1. *Montrer que le sommet de la parabole a pour abscisse* $2,5$. Puisque $f(x) = -x^2 + 5x$, alors $a = -1$, $b = 5$, $c = 0$. Le sommet de la parabole a pour abscisse $-\frac{-b}{2a} = -\frac{5}{2\times(-1)} = 2,5$.
2. *Quelle est l'altitude maximale atteinte par le ballon ?* Le ballon atteint sont altitude maximale au sommet de la parabole, c'est-à-dire $f(2,5) = -2,5^2 + 5 \times 2,5 = 6,25m$.
3. *À quelle distance du point de départ le ballon atterrit-il ?* Le ballon part de l'origine, de coordonnées $(0;0)$. L'abscisse de son sommet est 2,5. Puisqu'une parabole est symétrique par rapport à la droite verticale passant par le sommet, alors le ballon retombera au point symétrique de $(0;0)$, c'est-à-dire $(5;0)$.

   Donc le ballon retombera 5m plus loin.

Exercice 4.

1. *On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f : x \mapsto -2x^2 + 58x - 308$$

(a) *Dresser le tableau de variations de f.* On note $a = -2$, $b = 58$ et $c = -308$. On calcule $-\frac{b}{2a} = -\frac{58}{2\times(-2)} = 14,5$. De plus, $a < 0$, donc le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		$14,5$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

(b) *Montrer que $f(x) = (-2x + 14)(x - 22)$.*
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}(-2x + 14)(x - 22) &= -2x \times x - 2x \times (-22) + 14 \times x + 14 \times \\ &= -2x^2 + 44x + 14x - 308 \\ &= -2x^2 + 58x - 308 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

(c) *Dresser le tableau de signes de $(-2x + 14)(x - 22)$.*

x	$-\infty$		7		22		$+\infty$
$-2x + 14$		$+$	0	$-$		$-$	
$x - 22$		$-$		$-$	0	$+$	
$(-2x + 14)(x - 22)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. *Une éditrice de jeux réfléchit au prix de vente de son prochain produit. Une étude de marché a révélé que la fonction f définie à la question précédente modélise le bénéfice (en centaines d'euros) en fonction du prix de vente. Par exemple, en vendant son jeu 9€, elle aura un bénéfice de $f(9) = 52$ centaines d'euros, soit 5 200 euros.*

En utilisant les résultats de la question précédente, répondre aux questions suivantes.

(a) *Quels prix de vente peut-elle fixer pour faire un bénéfice (pour ne pas perdre de l'argent) ?*

L'éditrice gagnera de l'argent si son bénéfice est positif, c'est-à-dire si $f(x) \geqslant 0$. Dans le tableau de signe, on lit que cela correspond à $x \in [7; 22]$. Donc elle gagnera de l'argent si le prix de vente est compris entre 7 et 22 euros.

(b) *Quel prix de vente donne le bénéfice maximal ?* Le bénéfice maximal correspond au maximum de la fonction f. On lit dans le tableau de variations que ce maximum est atteint en $x = 14, 5$. Donc le prix donnant un revenu maximum est 14,5€.