Exercice 1. *Une agence de location de voitures propose deux contrats :*

Contrat A : 37€, plus 0,25€ par kilomètre parcouru ;

Contrat B : 48€, plus 0,10€ par kilomètre parcouru.

On souhaite savoir lequel des deux contrats est le plus avantageux. On admet que pour le contrat A, le côut de la location en fonction du nombre de kilomètres est modélisé par la fonction $f : x \mapsto 0,25x+37$, *et pour le contrat B par la fonction* $g : x \mapsto 0,10x+48$.

1. *Résolution graphique*

   (a) *Tracer les courbes des fonctions f et g sur le graphique ci-dessous.* Pour tracer la courbe d'une fonction affine, on calcule les coordonnées de deux points (quelconques, mais distincts), et on trace la droite passant par ces deux points.

   Fonction f : Prenons par exemple $x = 0$. Alors $f(0) = 0,25 \times 0 + 37 = 37$. Donc le point $A(0;37)$ est un point de la courbe. De même, pour $x = 80$, $f(80) = 0,25\times80+37 = 57$ donc le point $B(80;57)$ est un point de la courbe.

   Fonction g : Prenons par exemple $x = 0$. Alors $g(0) = 0,10 \times 0 + 48 = 48$. Donc le point $C(0;48)$ est un point de la courbe. De même, pour $x = 100$, $g(100) = 0,10 \times 100 + 48 = 58$ donc le point $D(100;58)$ est un point de la courbe.

   Nous pouvons maintenant tracer les deux courbes (figure 1, page 2).

   (b) *Répondre par lecture graphique : À partir de combien de kilomètres parcourus le contrat B est-il plus avantageux que le contrat A ?* Le point d'intersection des deux

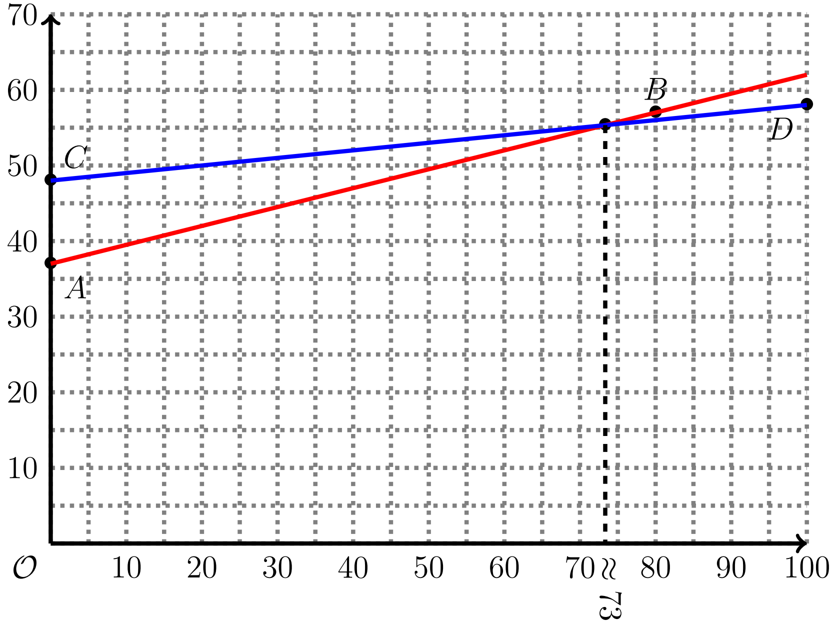

FIGURE 1 – Courbes de l'exercice 1.

droites a pour coordonnées environ $(73; 56)$. De plus, on observe que la courbe de la fonction f (contrat A, en rouge) est au dessus de celle de la fonction g (contrat B, en bleu) *après* ce point d'intersection. Donc le contrat A est plus cher après 73 km. Donc le contrat B est plus avantageux à partir de 73 km.

2. *Résolution algébrique : On souhaite répondre à la même question, mais par le calcul.*

   (a) *Montrer que le contrat B est plus avantageux que le contrat A si et seulement si :* $0,15x - 11 \geqslant 0$.

   Le contrat B est plus avantageux que le contrat A s'il coûte moins cher, c'est-à-dire si :

$$\begin{aligned} f(x) &\geqslant g(x) \\ 0,25x + 37 &\geqslant 0,10x + 48 \\ 0,25x - 0,10x + 37 - 48 &\geqslant 0 \\ 0,15x - 11 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

   (b) *Dresser le tableau de signes de la fonction* $x \mapsto 0,15x - 11$. C'est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 0,15$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -11$. On a donc $-\frac{b}{a} = -\frac{-11}{0,15} = \frac{220}{3}$. Le tableau de signes est donc :

x	$-\infty$		$\frac{220}{3}$		$+\infty$
$0,15x - 11$		$-$	0	$+$	

   (c) *Conclure en lisant le tableau de signes : À partir de combien de kilomètres parcourus le contrat B est-il plus avantageux que le contrat A ?* Aux questions précédentes, nous avons dit que le contrat B est plus avantageux si $0,15x - 11 \geqslant 0$. Donc d'après le tableau de signes, il est plus avantageux si $x \geqslant \frac{200}{3}$, c'est-à-dire si le nombre de kilomètres parcourus est supérieur à environ 73 km.

Exercice 2. *On considère la fonction $f : x \mapsto 12x - 3$, et la fonction g dont on connait le tableau de signes suivant.*

x	$-\infty$		-1		∞
$g(x)$		$+$	0	$-$	

1. *Dresser les tableaux de signe et de variations de f.* C'est une fonction affine qui a pour coefficient directeur $a = 12$, positif, et pour ordonnée à l'origine $b = -3$.

   Puisque sont coefficient directeur est strictement positif, la fonction est strictement croissante. Donc son tableau de variations est :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\nearrow$	

   D'autre part $-\frac{b}{a} = -\frac{-3}{12} = 0,25$, donc son tableau de signes est :

x	$-\infty$		$0,25$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2. *Compléter en utilisant l'un des quatre signes $<$, $>$, $=$ ou ? (s'il manque des informations pour répondre à la question).*

(a) $f(-2)\dots 0$ D'après le tableau de signes de f, $f(-2)$ est négatif : $f(-2) < 0$.

(b) $g(3)\dots 5$ D'après le tableau de signes de g, $g(3)$ est négatif. Il est donc plus petit que 5 : $g(3) < 5$.

(c) $f(0)\dots g(0)$ D'après les tableaux de signes, $f(0)$ est négatif, et $g(0)$ est positif, donc : $f(0) < g(0)$.

(d) $f(7)\dots g(-1)$ D'après les tableaux de signes, $f(7) > 0$, et $g(-1) = 0$. Donc : $f(7) > g(-1)$.

Exercice 3. *Voici le tableau de signes d'une fonction f.*

x	-4		-2		1		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Expliquer pourquoi il est impossible que le tableau suivant soit le tableau de variations de f.

x	-4		-3		5
f	2	$\searrow$		$\nearrow$	3

Il y a plusieurs incohérences ici. L'une d'entre elles est la suivante. D'après le tableau de variations, la fonction est croissante de -3 à 5. Mais d'après le tableau de signes, la fonction est positive en -3, puis négative entre -2 et 1, ce qui est impossible pour une fonction croissante. Donc les deux tableaux sont incompatibles.

Exercice 4. *On considère une fonction affine f, dont la courbe représentative passe par les points $A(3; 7)$ et $B(-1; 12)$.*

1. *Montrer que l'équation de la fonction f est : $f : x \mapsto -1,25x + 10,75$.* Puisque c'est une fonction affine, son expression est de la forme $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres à déterminer.

   Le coefficient directeur a se calcule par la formule $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{12-7}{-1-3} = \frac{5}{-4} = -1,25$. Donc l'expression de la fonction est $f(x) = -1,25x + b$. Déterminons la valeur de b.

   Puisque le point A est sur la droite, alors ses coordonnées vérifient l'équation de la fonction, et :

$$\begin{aligned} -1,25x_A + b &= y_A \\ -1,25 \times 3 + b &= 7 \\ -3,75 + b &= 7 \\ b &= 7 + 3,75 \\ b &= 10,75 \end{aligned}$$

   Donc l'expression de la fonction est $\boxed{f(x) = -1,25x + 10,75}$.

2. *Quelles sont les variations de f ? Justifier.* Puisque le coefficient directeur de la fonction f est $a = -1,25$, strictement négatif, alors la fonction est strictement décroissante.

3. *Le point $C(100; -113)$ est-il sur la courbe de f ? Justifier.* Vérifions si les coordonnées de ce point vérifient l'équation de la fonction :

$$\begin{aligned} f(x_C) &= f(100) \\ &= -1,25 \times 100 + 10,75 \\ &= -125 + 10,75 \\ &= -114,25 \end{aligned}$$

   Donc $f(x_C) \neq y_C$, et le point C n'est pas sur la droite de la fonction f.