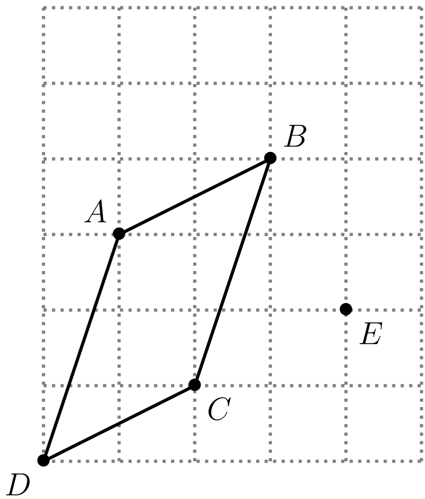
Exercice 1 (Vecteurs). *On considère le parallélogramme $ABCD$ suivant.*



1. *Placer le point E, image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.* Il y a (au moins) deux manières de placer le point E :
   — Tracer le milieu I de $[BC]$, puis placer le point E tel que I soit le milieu de $[AE]$ (c'est-à-dire tracer la demi-droite $[AI)$, puis reporter la longueur AI à partir du point I).
   — Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspond à une translation de deux unités vers la droite, et une vers le haut. Nous partons donc du point C, et effectuons un déplacement de deux unités vers la droite, et une vers le haut.
2. (a) *Justifiquer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$.* Puisque $ABCD$ est un parallélograme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Par définition, puisque E est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$.

(b) *En déduire que C est le milieu de $[DE]$.* Nous avons montré que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$. Donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$, et donc C est le milieu de $[DE]$ (c'est une propriété du cours).

Exercice 2 (Location)**.** *Une agence de location de voitures propose deux contrats :*

Contrat A : 37€, plus 0,25€ par kilomètre parcouru ;

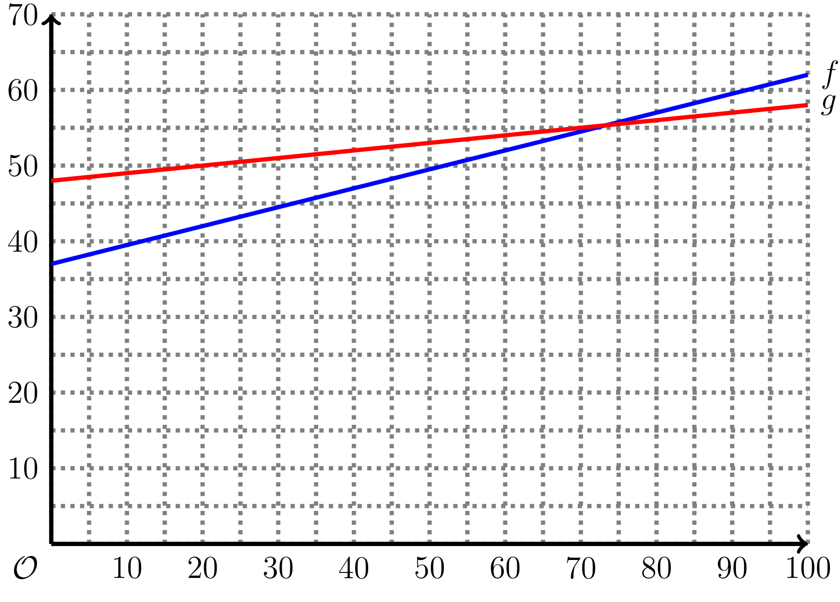
Contrat B : 48€, plus 0,10€ par kilomètre parcouru.

On souhaite savoir lequel des deux contrats est le plus avantageux.

On admet que pour le contrat A, le côut de la location en fonction du nombre de kilomètres est modélisé par la fonction $f : x \mapsto 0,25x + 37$, et pour le contrat B par la fonction $g : x \mapsto 0,10x + 48$.

1. *Résolution graphique*

   (a) *Tracer les courbes des fonctions f et g sur le graphique ci-dessous.*



— *Tracé de f* Puisque l'ordonnée à l'origine de f est 37, la courbe coupe l'axe des ordonnée en $y = 37$. D'autre part, on choisit une abscisses, par exemple $x = 100$.

On calcule $f(100) = 0,25 \times 100 + 37 = 62$, et on place le point de coordonnées $(100; 62)$. La droite de f passe par ces deux points.

— *Tracé de g* Puisque l'ordonnée à l'origine de f est 48, la courbe coupe l'axe des ordonnée en $y = 48$. D'autre part, on choisit une abscisses, par exemple $x = 100$. On calcule $g(100) = 0,10 \times 100 + 48 = 58$, et on place le point de coordonnées $(100; 58)$. La droite de g passe par ces deux points.

(b) *Répondre par lecture graphique : À partir de combien de kilomètres parcourus le contrat B est-il plus avantageux que le contrat A ?* On lit graphiquement que la droite de g est en dessous de celle de f à partir de $x \approx 75$. Donc le contrat B est plus avantageux à partir de 75 kilomètres parcourus environ.

2. *Résolution algébrique : Répondre à la même question par le calcul.* Le prix payé avec le contrat A pour x kilomètres est $f(x)$; celui avec le contrat B est $g(x)$. On cherche donc à résoudre $g(x) \leqslant f(x)$.

$$\begin{aligned} g(x) &\leqslant f(x) \\ 0,10x + 48 &\leqslant 0,25x + 37 \\ 48 - 37 &\leqslant 0,25x - 0,10x \\ 11 &\leqslant 0,15x \\ \frac{11}{0,15} &\leqslant x \\ \frac{220}{3} &\leqslant x \end{aligned}$$

Donc le contrat B est plus avantageux que le A à partir de $\frac{220}{3}$ kilomètres, soit environ 73 kilomètres.

Exercice 3 (Tableaux)**.** *On considère la fonction $f : x \mapsto 12x - 3$, et la fonction g dont on connait le tableau de signes suivant.*

x	$-\infty$		-1		∞
$g(x)$		$+$	0	$-$	

1. *Dresser les tableaux de signe et de variations de f.*

   Le coefficient directeur de f est $a = 12$, et son ordonnée à l'origine est $b = -3$. Le coefficient directeur est positif, donc la fonction est croissante.

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\nearrow$	

   Puisque la fonction est croissante, elle est négative d'abord, puis positive. Elle change de signe en $x = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{12} = \frac{1}{4}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2. *Compléter en utilisant l'un des quatre signes $<$, $>$, $=$ ou ? (s'il manque des informations pour répondre à la question).*

   (a) $f(-2) < 0$ puisque l'on peut lire sur le tableau de signes que pour $x < \frac{1}{4}$, f est négative.

   (b) $g(3) < 5$ puisque l'on peut lire sur le tableau de signes de g que pour $x > -1$, g négative (donc a fortiori $g(3)$ est inférieure à 5).

   (c) $f(0)?g(0)$ puisque l'on peut lire sur leurs tableaux de signes que pour $x = 0$, f est négative et g est négative, mais nous n'avons pas plus d'information que cela.

   (d) $f(7) > g(-1)$ puisque l'on peut lire sur leurs tableaux de signes que $f(7) > 0$ et $g(-1) = 0$, donc $f(7)$ est strictement supérieur à $g(-1)$.

Exercice 4 (Contradiction)**.** *Voici le tableau de signes d'une fonction f.*

x	-4		-2		1		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Prouver que le tableau suivant n'est pas *le tableau de variations de f.*

x	-4		-3		5
f	2	$\searrow$		$\nearrow$	3

Voici deux réponses possibles (qui sont en réalité deux variations de la même réponse).

— Selon le tableau de signes, $f(-3) > 0$ et $f(-1) < 0$, donc $f(-3) > f(-1)$. Mais selon le tableau de variations, la fonction est croissante entre -3 et 5, donc $f(-3) < f(-1)$, donc il y a une contradiction.

— Selon le tableau de signes, entre -3 et 5, la fonction passe des positifs aux négatifs autour de $x = -2$, puis à nouveau aux positifs autour de $x = 1$. Donc sur cet intervalle, la fonction est décroissante « autour » de $x = -2$, et croissante « autour » de $x = 1$. Mais cela est incompatible avec le tableau de variations, qui dit que la fonction est toujours strictement croissante sur cet intervalle.