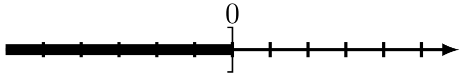
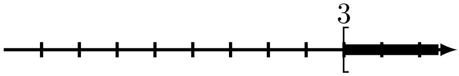
# (In)Équations du premier degré



**Exercice 1** (Intervalles — 3 points)**.** Compléter le tableau suivant.

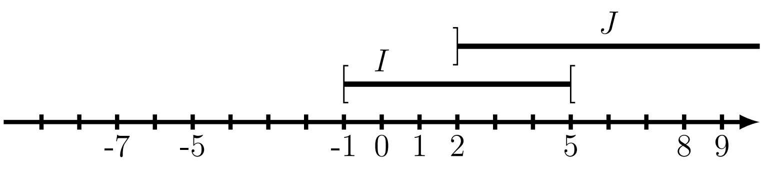
| Inéquation | Intervalle | Droite des réels |
|---|---|---|
| $x \leqslant 0$ | $x \in ]-\infty; 0]$ |   |
| $x \geqslant 3$ | $x \in [3; +\infty[$ |   |
| $-5 \leqslant x < 2$ | $x \in [-5; 2[$ |   |

**Exercice 2** (Union et intersection — 3 points)**.** *On considère les intervalles* $I = [-1; 5[$ *et* $J = ]2; +\infty[$*. Répondre vrai ou faux aux affirmations suivantes.*

*a.* $-1 \in I \cup J$ *c.* $-5 \in I \cup J$ *e.* $1 \in I \cap J$

*b.* $9 \in I \cup J$ *d.* $8 \in I \cap J$ *f.* $-7 \in I \cap J$

Commençons par représenter les deux ensembles sur la même droite des réels.




Rappel : l'ensemble $I \cap J$ désigne l'ensemble des nombres qui appartiennent aux deux intervalles $I$ et $J$ ; l'ensemble $I \cup J$ désigne l'ensemble des nombres qui appartiennent à $I$, à $J$, ou aux deux.

a. Vrai (-1 appartient à $I$).

b. Vrai (9 appartient à $J$).

c. Faux (-5 n'appartient ni à $I$ ni à $J$).

d. Faux (8 n'appartient qu'à $J$).

e. Faux (1 n'appartient qu'à $I$).

f. Faux (-7 n'appartient à aucun des deux ensembles).

**Exercice 3** (Inéquations — 6 points)**.**

1. *Résoudre chacune des inéquations suivantes.*

   (a) $x + 3 \geqslant 2x + 1$

   $$\begin{aligned} x \boldsymbol{-x} +3 &\geqslant 2x \boldsymbol{-x} +1 \\ 3 &\geqslant x + 1 \\ 3\mathbf{-1} &\geqslant x + 1\mathbf{-1} \\ 3 &\geqslant x \end{aligned}$$

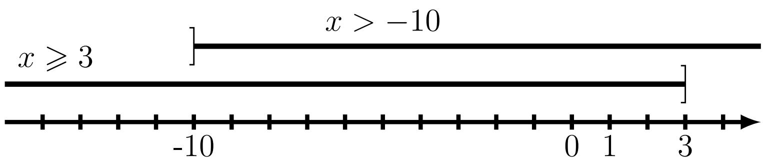
   (b) $2 > -8 - x$

   $$\begin{aligned} 2 \mathbf{+8} +3 &> -8 - x\mathbf{+8} \\ 10 &> -x \\ \mathbf{-1\times}10 &> -x\mathbf{\times(-1)} \\ -10 &< x \end{aligned}$$

2. *Résoudre le couple d'inéquations suivantes, et représenter les solutions sous la forme d'un intervalle.*

   $$x + 3 \geqslant 2x + 1 \text{ et } 2 > -8 - x$$

   Ce sont les mêmes équations que précédemment, mais il faut trouver les solutions qui vérifient les deux équations *en même temps*. Représentons les solutions sur la droite des réels.

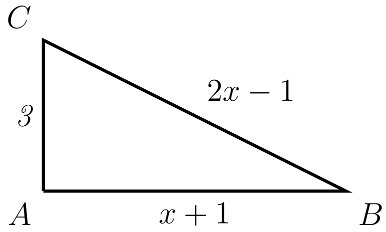

   On veut que les deux équations soient vraies en même temps, donc on cherche les valeurs de $x$ qui appartiennent aux deux intervalles, c'est-à-dire les valeurs de $x$ comprises entre $-10$ et 3. Donc $\boxed{x \in ]-10; 3]}$.

3. *Même question avec :*

   $$x + 3 \geqslant 2x + 1 \text{ ou } 2 > -8 - x$$

   On regarde la même droite des réels qu'à la question précédente. Cette fois-ci, on veut que l'une des deux équations soit vraie (ou les deux), donc on cherche les valeurs de $x$ qui appartiennent à au moins l'un des deux intervalles. Ici les deux intervallent couvrent tous les réels, donc $\boxed{x \in \left]-\infty ; +\infty\right[}$ (ou encore $x \in \mathbb{R}$).

**Exercice 4** (Triangle rectangle — 8 points)**.** *On considère le triangle suivant, où $x$ est variable. Les longueurs sont données en centimètres.*




*L'objet de l'exercice est de savoir pour quelles valeurs de $x$ le triangle $ABC$ est rectangle en $A$.*

1. *Montrer que le triangle est rectangle en $A$ si et seulement si : $3x^2 - 6x - 9 = 0$.* D'après le théorème de Pythagore (et sa réciproque), le triangle est rectangle en $A$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ (2x-1)^2 &= (x+1)^2 + 3^2 \\ 4x^2 - 4x + 1 \boldsymbol{- x^2} &= x^2 + 2x + 1 + 9 \boldsymbol{- x^2} \\ 3x^2 - 4x + 1 \boldsymbol{- 2x} &= 2x + 1 + 9 \boldsymbol{- 2x} \\ 3x^2 - 6x + 1 \boldsymbol{- 10} &= 1 + 9 \boldsymbol{- 10} \\ 3x^2 - 6x - 9 &= 0 \end{aligned}$$

   Donc le triangle est rectangle si et seulement si $3x^2 - 6x - 9 = 0$.

2. *Montrer que $3(x+1)(x-3) = 3x^2 - 6x - 9$.* Pour tout nombre $x$, on a :

$$\begin{aligned} 3(x+1)(x-3) &= 3(x \times x - x \times 3 + 1 \times x - 1 \times 3) \\ &= 3\left(x^2 - 3x + x - 3\right) \\ &= 3\left(x^2 - 2x - 3\right) \\ &= 3x^2 - 3 \times 2x - 3 \times 3 \\ &= 3x^2 - 6x - 9 \end{aligned}$$

3. *Résoudre* $3\,(x+1)\,(x-3)=0$. C'est une équation produit, donc $x+1=0$ ou $x-3=0$. Les solutions sont donc $x=-1$ (première équation) ou $x=3$ (seconde équation).

4. *En déduire les valeurs de $x$ pour lesquelles le triangle $ABC$ est rectangle en $A$. Quelles sont alors les dimensions du triangle ?* Nous avons dit (question 1) que le triangle est rectangle si et seulement si $x^2-6x-9=0$. Or (question 2), $x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$, donc le triangle est rectangle en $A$ si et seulement si $3(x+1)(x-3)=0$, c'est-à-dire si $x=-1$ ou $x=3$ (question 3).

   **Premier cas $x=-1$ :** Alors $AB=x+1=-1+1=0$ et $BC=2x-1=2\times(-1)+1=-1$. Mais une longueur ne peut pas être positive, donc ce cas est impossible.

   **Deuxième cas $x=3$ :** Alors $AB=x+1=3+1=4$ et $BC=2x-1=2\times 3-1=5$.

   Les dimensions du triangle sont donc $AB=4$, $AC=3$ et $BC=5$.