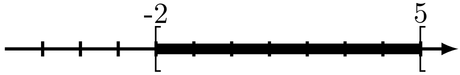
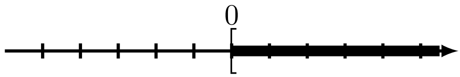
19/10
DS n° 2A

(In)Équations du premier degré

2^{nde}12

Exercice 1 (Intervalles — 3 points)**.** Compléter le tableau suivant.

Inéquation	Intervalle	Droite des réels
$x < 3$	$x \in]-\infty; 3[$	
$-2 \leqslant x < 5$	$x \in [-2; 5]$	
$x \geqslant 0$	$x \in [0; +\infty[$	

Exercice 2 (Union et intersection — 3 points)**.** *On considère les intervalles* $I = [-1; 5[$ *et* $J =]-\infty; 2[$*. Répondre vrai ou faux aux affirmations suivantes.*

a. $1 \in I \cup J$

b. $-9 \in I \cup J$

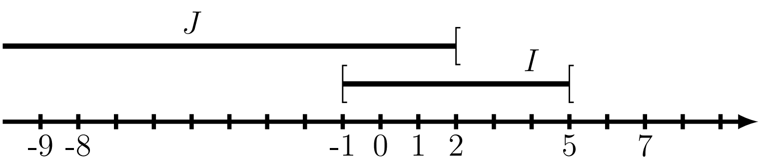
c. $5 \in I \cup J$

d. $-8 \in I \cap J$

e. $-1 \in I \cap J$

f. $7 \in I \cap J$

Commençons par représenter les deux ensembles sur la même droite des réels.



Rappel : l'ensemble $I \cap J$ désigne l'ensemble des nombres qui appartiennent aux deux intervalles I et J ; l'ensemble $I \cup J$ désigne l'ensemble des nombres qui appartiennent à I, à J, ou aux deux.

a. Vrai (il est dans les deux intervalles, même si un seul aurait suffit).

b. Vrai (il est dans l'intervalle J, donc il appartient à au moins un des deux).

c. Vrai (il est dans l'intervalle I).

d. Faux (il n'appartient qu'à l'intervalle I).

e. Vrai (il est dans les deux intervalles).

f. Faux (il n'est dans aucun des deux intervalles).

Exercice 3 (Inéquations — 6 points)**.**

1. *Résoudre chacune des inéquations suivantes.*

(a) $2x + 3 \geqslant x + 1$

$$2x + 3\boldsymbol{-x} \geqslant x \boldsymbol{-x} +1$$
$$x + 3 \geqslant 1$$
$$x + 3\boldsymbol{-3} \geqslant 1\boldsymbol{-3}$$
$$x \geqslant -2$$

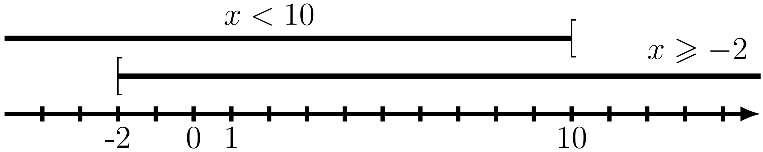
(b) $2 - x > -8$

$$2 - x\boldsymbol{-2} > -8\boldsymbol{-2}$$
$$-x > -10$$
$$-x\boldsymbol{\times(-1)} > -10\boldsymbol{\times(-1)}$$
$$x < 10$$

2. *Résoudre le couple d'inéquations suivantes, et représenter les solutions sous la forme d'un intervalle.*

$$2x + 3 \geqslant x + 1 \text{ et } 2 - x > -8$$

Ce sont les mêmes équations que précédemment, mais il faut trouver les solutions qui vérifient les deux équations *en même temps*. Représentons les solutions sur la droite des réels.



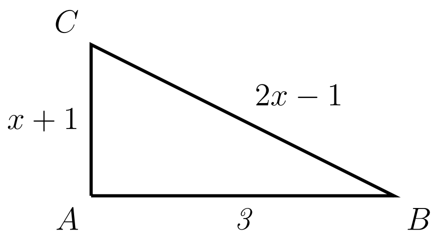
On veut que les deux équations soient vraies en même temps, donc on cherche les valeurs de x qui appartiennent aux deux intervalles, c'est-à-dire les valeurs de x comprises entre -2 et 10. Donc $\boxed{x \in [-2; 10[}$.

3. *Même question avec :*

$$2x + 3 \geqslant x + 1 \text{ ou } 2 - x > -8$$

On regarde la même droite des réels qu'à la question précédente. Cette fois-ci, on veut que l'une des deux équations soit vraie (ou les deux), donc on cherche les valeurs de x qui appartiennent à au moins l'un des deux intervalles. Ici les deux intervallent couvrent tous les réels, donc $\boxed{x \in \left]-\infty; +\infty\right[}$ (ou encore $x \in \mathbb{R}$).

Exercice 4 (Triangle rectangle — 8 points)**.** *On considère le triangle suivant, où x est variable. Les longueurs sont données en centimètres.*



L'objet de l'exercice est de savoir pour quelles valeurs de x le triangle ABC est rectangle en A.

1. *Montrer que le triangle est rectangle en A si et seulement si :* $3x^2 - 6x - 9 = 0$. D'après le théorème de Pythagore (et sa réciproque), le triangle est rectangle en A si et seulement si :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ (2x-1)^2 &= 3^2 + (x+1)^2 \\ 4x^2 - 4x + 1 \boldsymbol{- x^2} &= 9 + x^2 + 2x + 1 \boldsymbol{- x^2} \\ 3x^2 - 4x + 1 \boldsymbol{- 2x} &= 9 + 2x + 1 \boldsymbol{- 2x} \\ 3x^2 - 6x + 1 \boldsymbol{- 10} &= 9 + 1 \boldsymbol{- 10} \\ 3x^2 - 6x - 9 &= 0 \end{aligned}$$

Donc le triangle est rectangle si et seulement si $3x^2 - 6x - 9 = 0$.

2. *Montrer que* $3(x+1)(x-3) = 3x^2 - 6x - 9$. Pour tout nombre

x, on a :

$$\begin{aligned}3\left(x+1\right)\left(x-3\right) &= 3\left(x\times x - x\times 3 + 1\times x - 1\times 3\right)\\ &= 3\left(x^2 - 3x + x - 3\right)\\ &= 3\left(x^2 - 2x - 3\right)\\ &= 3x^2 - 3\times 2x - 3\times 3\\ &= 3x^2 - 6x - 9\end{aligned}$$

3. *Résoudre* $3\left(x+1\right)\left(x-3\right) = 0$. C'est une équation produit, donc $x+1=0$ ou $x-3=0$. Les solutions sont donc $x=-1$ (première équation) ou $x=3$ (seconde équation).
4. *En déduire les valeurs de x pour lesquelles le triangle ABC est rectangle en A. Quelles sont alors les dimensions du triangle ?* Nous avons dit (question 1) que le triangle est rectangle si et seulement si $x^2-6x-9=0$. Or (question 2), $x^2-6x-9 = 3(x+1)(x-3)$, donc le triangle est rectangle en A si et seulement si $3(x+1)(x-3)=0$, c'est-à-dire si $x=-1$ ou $x=3$ (question 3).

   Premier cas $x=-1$: Alors $AC = x+1 = -1+1 = 0$ et $BC = 2x-1 = 2\times(-1)+1 = -1$. Mais une longueur ne peut pas être positive, donc ce cas est impossible.

   Deuxième cas $x=3$: Alors $AC = x+1 = 3+1 = 4$ et $BC = 2x-1 = 2\times 3 - 1 = 5$.

   Les dimensions du triangle sont donc $AB=3$, $AC=4$ et $BC=5$.