Fonctions affines

Faire deux des trois exercices 1, 2, 3 au choix (ils sont classés par ordre de difficulté). L'exercice 4 est obligatoire.

Exercice 1 (Tableaux)**.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \mapsto -2x + 1$.

1. Construire le tableau de variations de f.
2. Construire le tableau de signes de f.
3. Sans aucun calcul, en utilisant uniquement les tableaux construits aux questions précédentes, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

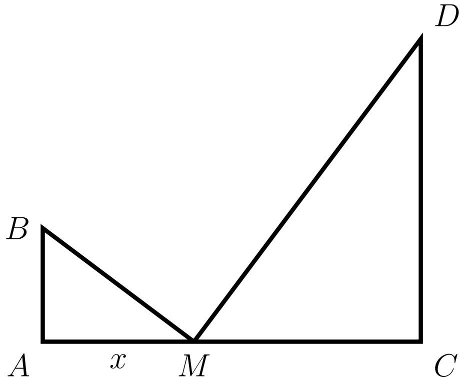
   (a) $f(98) < f(123)$

   (b) $f(-2) \geqslant 0$

   (c) $f(0) \leqslant f(2)$

   (d) $f(0,5) = 7$

Exercice 2 (Modélisation)**.** On considère la figure suivante (qui n'est pas à l'échelle), où les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DCA}$ sont droits. Le point M est un point de $[AC]$, et on nomme x la longueur AM, en centimètres. On connait les longueurs $AB = 3$, $AC = 5$ et $CD = 8$. Les longueurs sont données en centimètres.



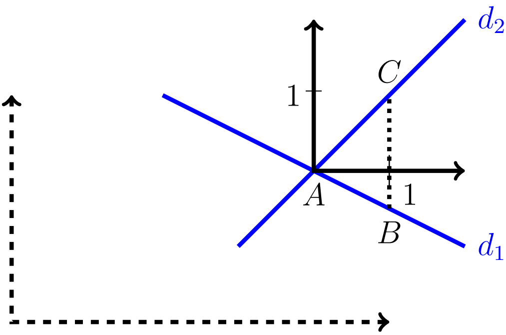
On appelle $\mathcal{A}(x)$ la somme des aires des deux triangles BAM et CDM.

1. *Cas particulier.* Dans cette question (et uniquement dans cette question), on considère que $x = 2$.
   (a) Calculer l'aire du triangle BAM.
   (b) Calcule la longueur MC, puis l'aire du triangle DCM.
   (c) En déduire $\mathcal{A}(2)$.
2. *Cas général.*
   (a) Montrer que l'aire de DCM est égale à $20 - 4x$.
   (b) Exprimer l'aire de BAM en fonction de x, puis montrer que $\mathcal{A}(x) = 20 - 2,5x$.

   Répondre aux questions suivantes en utilisant l'expression $\mathcal{A}(x) = 20 - 2,5x$.

   (c) Lorsque M de déplace de A vers C, est-ce que l'aire $\mathcal{A}(x)$ augmente ou diminue ? Justifier.
   (d) Quelle est la plus petite valeur prise par $\mathcal{A}$? La plus grande ?
   (e) Pour quelles valeurs de x l'aire $\mathcal{A}$ est-elle supérieure à 10 cm^2 ?

Exercice 3 (Perpendicularité)**.** *L'objet de l'exercice est de trouver une méthode permettant de savoir si deux droites (dont on connait les équations) sont perpendiculaires ou non.*
Soient deux droites, dont les équations dans un repère orthonormé sont : $d_1 : y = a_1x + b_1$ et $d_2 : y = a_2x + b_2$. On suppose que ces deux droites ne sont pas parallèles, et on appelle A leur point d'intersection.
On considère un nouveau repère orthonormé, d'origine A, dont les axes sont parallèles aux axes du repère d'origine. À partir de maintenant, on ne manipule plus que des coordonnées dans ce nouveau repère.
On considère le point B, sur la droite d_1, d'abscisse 1, et le point C, sur la droite d_2, d'abscisse 1.
La situation est schématisée dans la figure ci-dessous, où l'ancien repère est en pointillés, et le nouveau en traits pleins.



1. *Premier cas :* On se place dans le cas où les deux droites ne sont pas parallèles.
   (a) Expliquer pourquoi les coordonnées de A, B et C sont $A(0,0)$, $B(1,a_1)$ et $C\,(1,a_2)$.
   (b) Exprimer les nombres AB^2, BC^2 et AC^2 en fonction de a_1 et a_2.
   (c) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $a_1 \times a_2 = -1$.

(d) En déduire que deux droites non parallèles sont perpendiculaires si et seulement si $a_1 \times a_2 = -1$.

2. *Deuxième cas :* Dans ce cas, les deux droites sont parallèles. On admet que deux droites sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux. Montrer alors que $a_1 \times a_2 \neq -1$.

En faisant le bilan des deux cas précédents, nous avons montré que les droites de deux fonctions affines sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

3. *Application :* Soint trois droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, d'équations respectives :

$$\Delta_1 : y = 2x-1 \qquad \Delta_2 : y = -0,5x+2 \qquad \Delta_3 : y = \frac{x}{3}-1$$

Parmi ces droites, lesquelles sont perpendiculaires ?

Exercice 4 (Culture)**.** Donner un exemple de problème ou conjecture non-résolu en mathématiques, dont vous comprenez (si possible) l'énoncé.