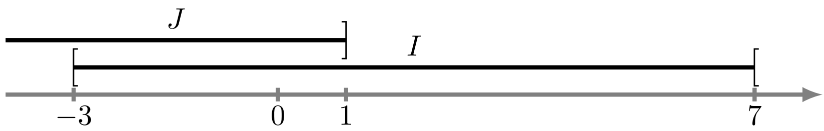
Inéquations et Intervalles

Exercice 1 (Intervalles)**.** On considère les deux intervalles :

$$I = [-3;7[\text{ et } J =]-\infty,1]$$

1. *Représenter ces deux intervalles sur la même droite des réels.*



2. *Donner un exemple de nombre x dans chacun des cas suivants :*

   (a) « $x \in I$ et $x \in J$ » signifie x est dans l'intervalle I et dans l'intervalle J, donc tous les nombres entre -3 et 1 conviennent (par exemple -2).

   (b) « $x \in I$ et $x \notin J$ » signifie i est dans l'intervalle I mais pas dans J, donc tous les nombres entre 1 et 7 conviennent (par exemple 5).

   (c) « $x \notin I$ et $x \in J$ » signifie i n'est pas dans l'intervalle I mais est dans J, donc tous les nombres inférieurs à -3 conviennent (par exemple -108).

   (d) « $x \notin I$ et $x \notin J$ » signifie i n'est ni dans l'intervalle I ni dans J, donc tous les nombres supérieurs à 7 conviennent (par exemple 1729).

3. *Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.*

   (a) $7 \in I$: Faux (car l'invertalle I est fermé à droite (le crochet est vers l'extérieur), donc 7 n'est pas dans I).

   (b) $10 \in I$: Faux.

   (c) $1 \in J$: Vrai.

   (d) $-1 \in I$ et $-1 \in J$: Vrai.

   (e) $-10 \in I$ ou $-10 \in J$: Vrai (pour que ce soit vrai, il suffit que l'une des deux conditions soient vraies, ce qui est le cas pour $-10 \in J$).

   (f) $0 \in I$ ou $0 \in J$: Vrai (en mathématique, « ou » signifie « l'un ou l'autre, ou les deux »).

   (g) $0 \in I \cup J$: Vrai (c'est la même question que la question 3f).

   (h) $0 \in I \cap J$: Vrai (car 0 est à la fois dans I et dans J).

   (i) $6 \in I \cap J$: Faux (car 6 est certe dans I, mais pas dans J).

Exercice 2 (Lieu géométrique)**.**

1. *Calculer l'aire totale du parc. En déduire l'aire minimale que doivent occuper le bassin et le bois.*

   Le parc est un rectangle de côtés (en décamètres) 5 et 10, donc son aire est $5 \times 10 = 50\,\mathrm{dam}^2$. Le bassin et le bois doivent occuper chacun un cinquième du parc au moins, soit $50/5 = 10\,\mathrm{dam}^2$.

2. *Exprimer l'aire du bassin en fonction de x. En déduire que « L'aire du bassin occupe au moins le cinquième du parc » est équivalent à $2,5x \geqslant 10$.*

   Le bassin est un triangle rectangle, donc son aire est $\frac{5\times x}{2} = 2,5x$. Elle doit être supérieure à un cinquième de l'aire totale, soit $2,5x \geqslant \frac{50}{10}$, c'est-à-dire $2,5x \geqslant 10$.

3. *Exprimer l'aire du bois en fonction de x. En déduire que « L'aire du bois occupe au moins le cinquième du parc » est équivalent à $25 - 2,5x \geqslant 10$.*

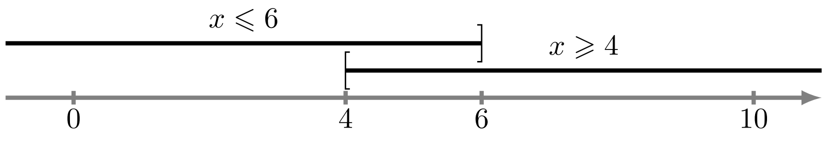
   De même, le bois est un triangle rectangle d'aire $\frac{5\times(10-x)}{2} = 2,5(10-x) = 25 - 2,5x$. Elle doit être supérieure à un cinquième de l'aire du parc, donc $25 - 2,5x \geqslant 50/5$, et en simplifiant : $25 - 2,5x \geqslant 10$.

4. *Résoudre chacune des deux inéquations, et représenter l'ensemble des solutions sur la droite des réels, puis sous la forme d'un intervalle.* Commençons par résoudre séparément chacune des deux équations.

$$
\begin{aligned}
2,5x &\geqslant 10 \\
\frac{2,5x}{2,5} &\geqslant \frac{10}{2,5} \\
x &\geqslant 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
25 - 2,5x &\geqslant 10 \\
25 - 2,5x - 25 &\geqslant 10 - 25 \\
-2,5x &\geqslant -15 \\
\frac{-2,5x}{-2,5} &\leqslant \frac{-15}{-2,5} \\
x &\leqslant 6
\end{aligned}
$$

   Représentons les résultats sur la droite des réels.



   Il faut que les deux conditions soient satisfaites en même temps, donc les solutions sont $x \in [4;6]$.

5. *Conclure par une phrase en français : Où peut-on placer l'entrée M pour respecter les contraintes ?*

L'entrée du parc doit donc être placée à une distance comprise entre 40 et 60 mètres du coin nord-ouest du parc.