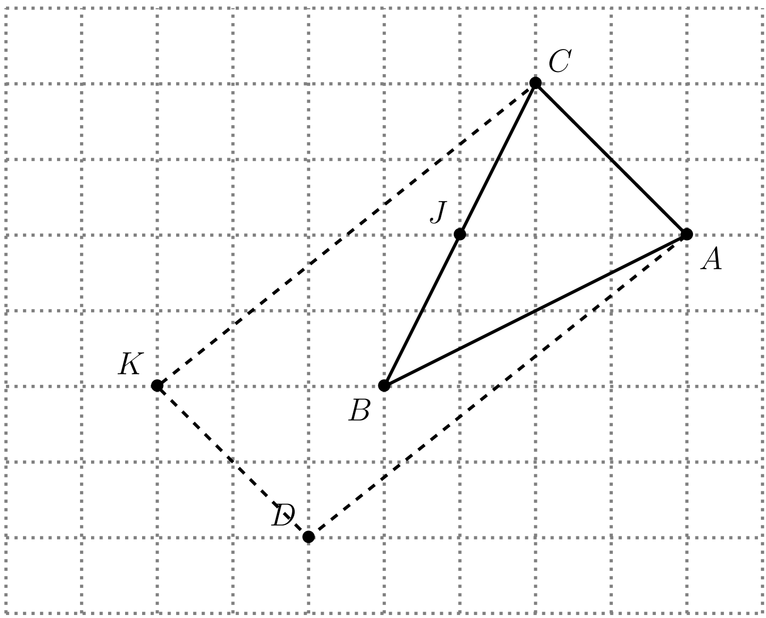
12/03/16 **FONCTIONS AFFINES** *2de10*
DS 6 — B **VECTEURS**

Nom : ....

Exercice 1 (Placer des points — 8 points). *On considère les points A, B, C suivants.*



On nomme J le milieu de [BC], et on définit K et D tels que $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$.

1. (a) *Placer les points J, K, D sur le graphique ci-dessus.* Voir la figure.
   (b) *Conjecturer la nature du quadrilatère CKDA.* Le quadrilatère semble être un parallélogramme.
2. (a) *Quelle est la relation entre* $\overrightarrow{CJ}$ *et* $\overrightarrow{CB}$ *? Justifier.* Puisque J es tle milieu de $[BC]$, alors $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.
   (b) *Montrer que* $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CK}$. Puisque $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CJ}$ et

$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}$, alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JK} \\ &= \overrightarrow{CK}\end{aligned}$$

(c) *En déduire la nature du quadrilatère $CKDA$.* Nous avons montré que $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CK}$. D'autre part, par définition, $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. Donc $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AD}$, et le quadrilatère $CKDA$ est un parallélogramme.

Exercice 2 (Fonctions affines — 10 points)**.**

1. *On considère deux fonctions affines $f : x \mapsto x - 4$ et $g : x \mapsto -2x - 2$, définies sur $\mathbb{R}$.* On a dressé le tableau de signes d'une des deux fonctions, mais il est incomplet.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	

(a) *Ce tableau concerne-t-il la fonction f ou la fonction g ? Pourquoi ?* C'est le tableau d'une fonction croissante (une fonction d'abord négative, puis positive). Donc il s'agit de la fonction f, qui est croissante car son coefficient directeur est positif.

(b) *Compléter les deux pointillés dans ce tableau.* La fonction change de signe en $-\frac{-4}{1} = 4$. Voir le tableau complété.

2. *Déterminer l'expression d'une fonction affine telle que $g(-2) = 2$ et $g(16) = 5$.* On sait que sont coefficient directeur est $a = \frac{g(16)-g(-2)}{16-(-2)} = \frac{5-2}{16+2} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$. Donc la fonction g est de la forme $g(x) = \frac{1}{6}x + b$.

   D'autre part, puisque $g(-2) = 2$, alors $g(-2) = \frac{1}{6} \times (-2) + b = 2$. La résolution de cette équation donne $b = \frac{7}{3}$.

   Donc l'expression de g est $g(x) = \frac{x}{6} + \frac{7}{3}$.

3. *Soit* $h : x \mapsto -7x - 5$.

   (a) *Dresser le tableau de variations de* h. La fonction h est décroissante, car son coefficient directeur est négatif. Son tableau de variation est donc :

x	$-\infty$		$+\infty$
h		$\searrow$	

   (b) *Calculer* $h(0)$ *puis, sans faire de nouveaux calculs, déterminer le signe de* $h(2016)$. On a $h(0) = -7 \times 0 - 5 = -5$. Donc $h(0)$ est négatif. Puisque la fonction est décroissante, et que $2016 > 0$, alors $h(2016)$ est également négatif.

Exercice 3 (Contradiction — 2 points)**.** *Voici le tableau de signes d'une fonction* f.

x	*-3*		*-1*		*2*		*6*
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Prouver que le tableau suivant n'est pas *le tableau de variations de* f.

x	*-3*		*-2*		*6*
f	*2*	$\searrow$	*-1*	$\nearrow$	*3*

Ces deux tableaux contiennent de nombreuses contradiction. Une des plus simples est que selon le tableau de signes, $f(-2) > 0$ (car $-2 \in [-3; -1]$, et que la fonction est positive sur cet intervalle), alors que selon le tableau de variations, $f(-2) < 0$ (car $f(-2) = -1$). C'est une contradiction, donc ces deux tableaux ne peuvent pas correspondre à la même fonction.

Exercice 4 (Bonus — 1 points)**.** *Soient A et B deux points distincts. Lequel des deux vecteurs suivants a la plus grande norme : $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BA}$, ou $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$? Justifier.*

Simplifions les deux expressions.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB} \\ &= 2\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{AA} \\ &= \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

Donc la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BA}$ est le double de la longueur du segment $[AB]$, qui est non nulle (car A et B sont distincts), alors que le vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$ est le vecteur nul, de norme nulle. Donc le vecteur $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BA}$ a la plus grande norme.