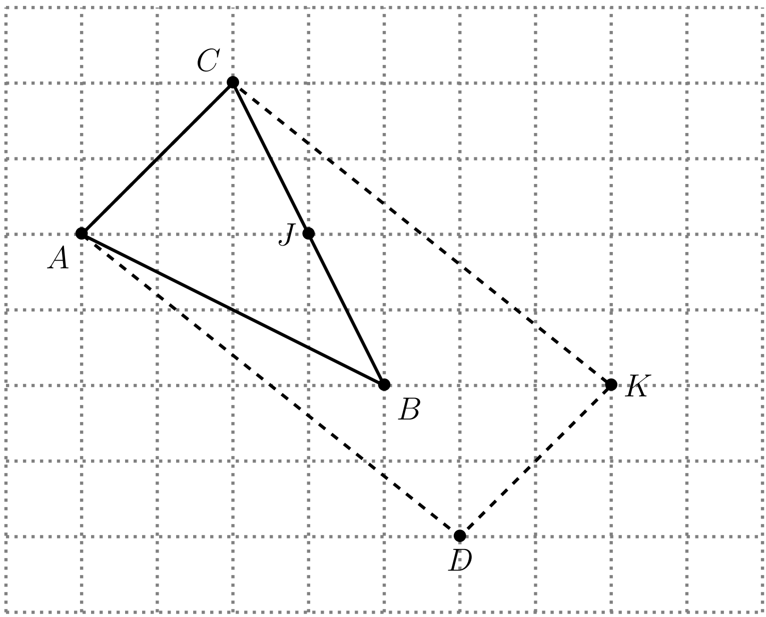
12/03/16
DS 6 — A

FONCTIONS AFFINES VECTEURS

2^{de}10

Nom : ....

Exercice 1 (Placer des points — 8 points). *On considère les points A, B, C suivants.*



On nomme J le milieu de $[BC]$, et on définit K et D tels que $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$.

1. (a) *Placer les points J, K, D sur le graphique ci-dessus.* Voir la figure.

   (b) *Conjecturer la nature du quadrilatère $CKDA$.* Le quadrilatère semble être un parallélogramme.

2. (a) *Quelle est la relation entre $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{CB}$? Justifier.* Puisque J es tle milieu de $[BC]$, alors $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

   (b) *Montrer que $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CK}$.* Puisque $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}$, alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JK} \\ &= \overrightarrow{CK}\end{aligned}$$

   (c) *En déduire la nature du quadrilatère $CKDA$.* Nous avons montré que $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CK}$. D'autre part, par définition, $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. Donc $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AD}$, et le quadrilatère $CKDA$ est un parallélogramme.

Exercice 2 (Fonctions affines — 10 points)**.**

1. *On considère deux fonctions affines $f : x \mapsto x - 4$ et $g : x \mapsto -2x - 2$, définies sur $\mathbb{R}$. On a dressé le tableau de signes d'une des deux fonctions, mais il est incomplet.*

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g		$+$	0	$-$	

   (a) *Ce tableau concerne-t-il la fonction f ou la fonction g ? Pourquoi ?* C'est le tableau d'une fonction décroissante (une fonction d'abord positive, puis négative). Donc il s'agit de la fonction g, qui est décroissante car son coefficient directeur est négatif.

(b) *Compléter les deux pointillés dans ce tableau.* La fonction change de signe en $-\frac{-2}{-2} = -1$. Voir le tableau complété.

2. *Déterminer l'expression d'une fonction affine telle que $g\left(-2\right) = 2$ et $g\left(10\right) = 4$.* On sait que sont coefficient directeur est $a = \frac{g(10)-g(-2)}{10-(-2)} = \frac{4-2}{10+2} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Donc la fonction g est de la forme $g(x) = \frac{1}{6}x + b$.
D'autre part, puisque $g\left(-2\right) = 2$, alors $g(-2) = \frac{1}{6} \times (-2) + b = 2$. La résolution de cette équation donne $b = \frac{7}{3}$.
Donc l'expression de g est $g(x) = \frac{x}{6} + \frac{7}{3}$.

3. *Soit $h : x \mapsto -3x - 1$.*

(a) *Dresser le tableau de variations de h.* La fonction h est décroissante, car son coefficient directeur est négatif. Son tableau de variation est donc :

x	$-\infty$	$+\infty$
h	$\searrow$	

(b) *Calculer $h(0)$ puis, sans faire de nouveaux calculs, déterminer le signe de $h(2016)$.* On a $h(0) = -3 \times 0 - 1 = -1$. Donc $h(0)$ est négatif. Puisque la fonction est décroissante, et que $2016 > 0$, alors $h(2016)$ est également négatif.

Exercice 3 (Contradiction — 2 points)**.** *Voici le tableau de signes d'une fonction f.*

x	-4		-2		1		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Prouver que le tableau suivant n'est pas *le tableau de variations de f.*

x	-4	-3	5
f	2 ↘	-1	↗ 3

Ces deux tableaux contiennent de nombreuses contradiction. Une des plus simples est que selon le tableau de signes, $f(-3) > 0$ (car $-3 \in [-4; -2]$, et que la fonction est positive sur cet intervalle), alors que selon le tableau de variations, $f(-3) < 0$ (car $f(-3) = -1$). C'est une contradiction, donc ces deux tableaux ne peuvent pas correspondre à la même fonction.

Exercice 4 (Bonus — 1 points)**.** *Soient A et B deux points distincts. Lequel des deux vecteurs suivants a la plus grande norme : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA}$, ou $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$? Justifier.*

Simplifions les deux expressions.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \\ &= 2\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{AA} \\ &= \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

Donc la norme du vecteur $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA}$ est le double de la longueur du segment $[AB]$, qui est non nulle (car A et B sont distincts), alors que le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$ est le vecteur nul, de norme nulle. Donc le vecteur $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA}$ a la plus grande norme.