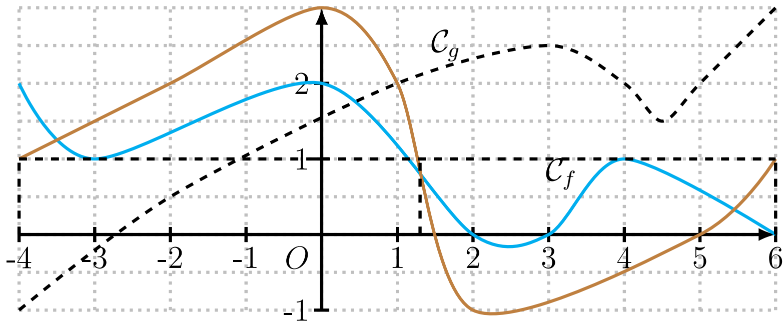
11/01/16
DS 4 — B

Généralités sur les fonctions

$2^{de}10$

Exercice 1 (Lecture graphique — 8 points)**.** *On considère les fonctions f et g, définies sur $[-4; 6]$ et représentées sur le graphique suivant.*



Répondre aux questions par lecture graphique.

1. *Déterminer les solutions de $g(x) = 1$.* On trace la droite d'équation $y = 1$ (la droite passant par le point d'ordonnée 1, et parallèle à l'axe des abscisses). On repère les point d'intersection de cette droite et de la courbe de g : il y en a trois, d'abscisse respective -4, 1,3, et 6. Les solutions sont donc -4, 1,3 et 6.
2. *Déterminer les solutions de $f(x) \leqslant g(x)$.* On repère les points de la courbe de f situés en dessous de celle de g ; les solutions sont les abscisses de ces points, soit $[-3{,}5; 1,4] \cup [5{,}5; 6]$.
3. *Tracer la courbe d'une fonction h telle que les solutions de $h(x) \leqslant 2$ soient $[-4; 1] \cup [4; 5]$.* Voir un exemple en pointillés sur le graphique.
4. *Dresser le tableau de variations de la fonction f.*

x	-4	-3	0	2,5	4	6
f	2 ↘	-1 ↗	2 ↘	$-0{,}25$ ↗	1 ↘	0

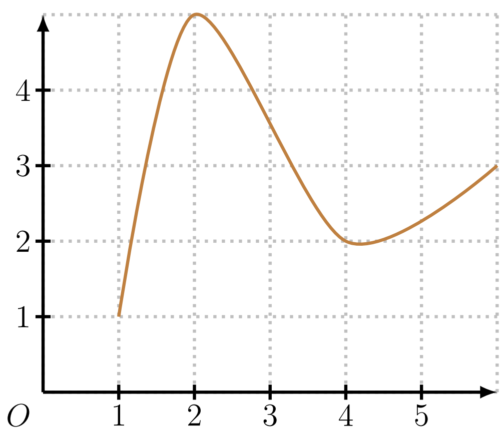
5. *Pourquoi n'existe-t-il pas de fonction h telle que les deux conditions suivantes soient vraies :*
    - *$h(x)$ soit toujours supérieur à $f(x)$;*
    - *$h(x) \leqslant 0$ sur $[4; 5]$?*

    Prenons par exemple $h\,(4,5)$. Puisque $f\,(4,5) \approx 0{,}8$, et que $h\,(x)$ est toujours supérieur à $f\,(x)$, alors $h\,(4,5)$ doit être supérieur à 0,8. D'autre part, puisque $h\,(x) \leqslant 0$ sur $[4; 5]$, alors $h\,(4,5)$ doit être inférieur à 0. Nous avons donc un nombre, $h\,(4,5)$, qui est à la fois supérieur à 0,8 et inférieur à 0 : c'est impossible, donc la fonction h n'existe pas.

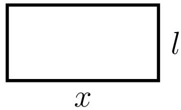
Exercice 2 (Variations — 4 points)**.** Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	1		2		4		6
f	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	2	$\nearrow$	3

1. *Comparer $f(2)$ et $f(3)$.* Puisque la fonction f est décroissante sur $[2; 4]$, et que $2 < 3$, alors $f\,(2) > f\,(3)$.
2. *Tracer la courbe d'une fonction f compatible avec ce tableau.*



Exercice 3 (Problème — 8 points)**.** Une fermière dispose de 200 m de cloture pour faire paître ses moutons. Elle souhaite faire une cloture rectangulaire qui ait la plus grande aire possible.



On appelle x et l les longueurs des côtés en mètres.

1. (a) *Exprimer le périmètre en fonction de x et l.* Le périmètre est la somme des côtés, donc il est égal à $2 \times x + 2 \times l$.

   (b) *En déduire que $l = 100 - x$.* Puisque la fermière dispose de 200 m de cloture, alors le périmètre est égal à 200 m, et :

$$\begin{aligned} 2 \times x + 2 \times l &= 200 \\ 2\,(x + l) &= 200 \\ \frac{2\,(x+l)}{2} &= \frac{200}{2} \\ x + l &= 100 \\ l &= 100 - x \end{aligned}$$

2. *On appelle $\mathcal{A}(x)$ l'aire de l'enclos, en m^2, en fonction de x.*

   (a) *Quel est le domaine de définition de $\mathcal{A}$?* La plus petite valeur que peut prendre x est 0 (une longueur ne peut pas être négative), et la plus grande est 100 (il n'est pas possible de faire un rectangle de périmètre 200 avec un côté plus grand que 100). Donc le domaine de définition est $[0; 100]$.

   (b) *Montrer que $\mathcal{A}(x) = x\,(100 - x)$.* L'aire d'un rectangle est le produit des longueurs, soit $\mathcal{A}\,(x) = x \times l$. Mais puisque $l = 100 - x$, alors $\mathcal{A}\,(x) = x\,(50 - x)$.

3. *Le tableau de variations de $\mathcal{A}$ est le suivant.*

x	0		50		100
			2 500		
$\mathcal{A}$		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

Quel est l'aire maximale que peut prendre l'enclos ? Quelle est alors la forme de l'enclos ?

La valeur maximale de la fonction $\mathcal{A}$ est 2 500 : l'aire maximale est donc $2\,500\,\mathrm{m}^2$. Dans ce cas, $x = 50$, et donc $l = 100 - 50 = 50$: l'enclos est donc un carré.

4. Bonus *Avec la même longueur de cloture, sans respecter toutes les contraintes de ce problème, est-il possible de faire un enclos encore plus grand ?* Au moins deux réponses sont possibles, une réponse mathématique, et une réponse pratique :

   mathématique en faisant un enclos de forme pentagonale (cinq côtés), hexagonale (six côtés), etc., ou un cercle, il est possible d'obtenir une aire plus grande avec le même périmètre ;

   pratique en accolant l'enclos à un bâtiment, on peut obtenir un enclos plus grand, comme dans l'exemple ci-dessous, où l'enclos a pour aire $4\,800\,\mathrm{m}^2$.