08/01/16
DM 4

Fonctions

2^{de}10

Faire un des deux exercices 1 ou 2 au choix (l'exercice 1 est plus difficile). L'exercice 3 est obligatoire.

Exercice 1 (Variation de la fonction carré)**.** Le but de l'exercice est d'étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$ (appellée *fonction carré*).

1. (a) Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de f, pour des abscisses allant de -2 à 2, et des ordonnées de 0 à 4.
   (b) Par lecture graphique, conjecturer le tableau de variations de f.
2. Rappeler la définition de *fonction croissante* et *fonction décroissante.*
3. Soient a et b deux nombres positifs, tels que $a < b$.
   (a) Quel est le signe de $a + b$? Quel est le signe de $a - b$?
   (b) En déduire que $(a + b)(a - b) < 0$.
   (c) En déduire que $a^2 < b^2$.
   (d) En déduire le sens de variations de f sur $[0; +\infty[$.
4. Refaire le même raisonnement avec a et b deux nombres négatifs, et en déduire le sens de variations de f sur $]-\infty; 0]$.
5. Conclure en dressant le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. La conjecture de la question 1b est-elle conforme à ce tableau de variations ?

Exercice 2 (Variations d'une fonction affine)**.** Le but de l'exercice est d'étudier les variations des fonctions $f : x \mapsto 3x - 2$ et $g : x \mapsto -x + 1$.

1. (a) Tracer dans un repère orthonormé les courbes de f et g, pour des abscisses allant de -1 à 2 et des ordonnées de -5 à 4.
   (b) Par lecture graphique, conjecturer le tableau de variations de f et g.
2. Rappeler la définition de *fonction croissante* et *fonction décroissante*.
3. *Étude de f.* Soient a et b deux nombres tels que $a < b$.
   (a) Compléter le raisonnement suivant avec les signes $<$ et $>$.

$$a \dots b$$
$$3a \dots 3b$$
$$3a - 2 \dots 3b - 2$$
$$f(a) \dots f(b)$$

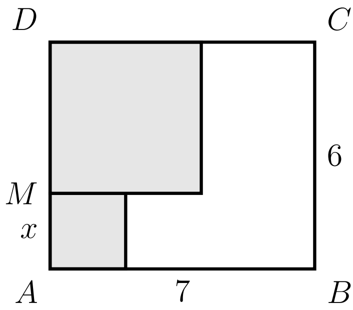
   (b) En déduire le sens de variations de f.
4. *Étude de g.* Soient a et b deux nombres tels que $a < b$.
   (a) Compléter le raisonnement suivant avec les signes $<$ et $>$, et en justifiant le passage à la deuxième ligne.

$$a \dots b$$
$$-a \dots - b \qquad \text{car ...}$$
$$-a + 1 \dots - b + 1$$
$$g(a) \dots g(b)$$

   (b) En déduire le sens de variations de g.
5. Vérifier que les variations trouvées aux questions 3 et 4 correspondent bien aux conjectures de la question 1b.

Exercice 3 (Aires)**.**

Pour aménager un parc rectangulaire, un urbaniste a les contraintes suivantes. Le parc doit contenir deux bassins carrés (représentés en gris), occupant tout le côté ouest. Le reste (représenté en blanc) est de la pelouse. Les dimensions des deux carrés sont libres, mais la surface des bassins doit être inférieure à la moitié de la surface du parc.



Le problème est représenté ci-dessus : le parc est représenté par le rectangle $ABCD$, et le carré de côté $[AM]$ a pour côté x. Toutes les longueurs sont données en décamètres. On appelle $\mathcal{A}$ l'aire des bassins, en dam^2.

1. Calculer l'aire totale du parc.
2. Quelles sont les valeurs possibles de x ?
3. Combien mesure le segment $[DM]$? En déduire que $\mathcal{A} = 2x^2 - 12x + 36$.
4. À la main ou à l'ordinateur, tracer dans un repère la courbe de la fonction $\mathcal{A}$. On prendra des abscisses allant de 0 à 6, et des ordonnées de 0 à 36. Si le tracé est fait à l'ordinateur, imprimer le tracé et le rendre avec la copie.
5. Résoudre graphiquement $\mathcal{A} \leqslant 21$.
6. En expliquant le lien entre la question précédente et le problème de départ, donner les valeurs de x pour lesquelles l'urbaniste respecte les contraintes du parc.