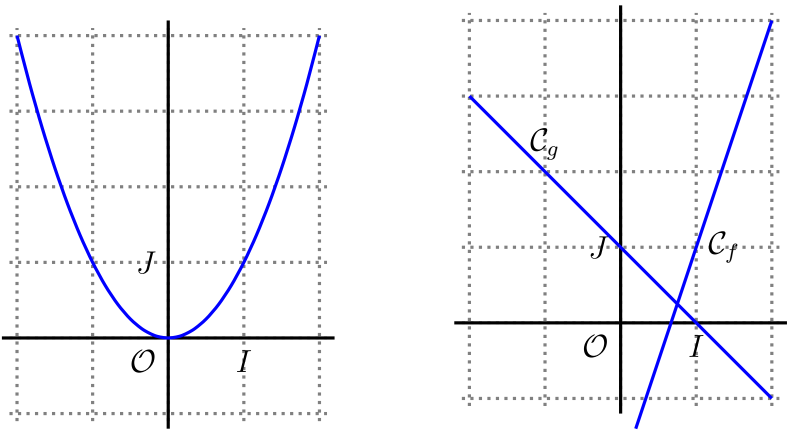
08/01/16
DM 4

Fonctions

2^de^10



(a) Exercice 1 (b) Exercice 2

Figure 1 – Représentations graphiques

Exercice 1 (Variation de la fonction carré)**.** *Le but de l'exercice est d'étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto x^2$, définie sur* $\mathbb{R}$ *(appellée* fonction carré*).*

1. (a) *Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de f, pour des abscisses allant de -2 à 2, et des ordonnées de 0 à 4.* Voir la figure page 1.

   (b) *Par lecture graphique, conjecturer le tableau de variations de f.*

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$\searrow$	0	$\nearrow$

2. *Rappeler la définition de* fonction croissante *et* fonction décroissante.
   - Une fonction f définie sur un intervalle I est dite croissante si pour tout a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$.
   - Elle est dite décroissante si pour tout a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$.
3. *Soient a et b deux nombres positifs, tels que $a < b$.*
   (a) *Quel est le signe de $a+b$? Quel est le signe de $a-b$?* Puisque a est positif et b est strictement plus grand que a, alors b est strictement positif. Donc $a+b$ est aussi strictement positif : $a+b > 0$.

   De plus, puisque $a < b$, alors, en soustrayant b de part et d'autre de l'équation, on a $a - b < 0$.

   (b) *En déduire que* $(a+b)(a-b) < 0$. Le produit $(a+b)(a-b)$ est le produit d'un terme strictement positif et d'un autre strictement négatif : il est strictement négatif.

   (c) *En déduire que* $a^2 < b^2$. Nous venons de montrer que $(a+b)(a-b) < 0$. Donc :

$$
\begin{aligned}
(a+b)(a-b) &< 0 \\
a^2 - b^2 &< 0 \\
a^2 &< b^2 \\
f(a) &< f(b)
\end{aligned}
$$

   (d) *En déduire le sens de variations de f sur* $[0; +\infty[$. Nous venons de montrer que si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$: c'est la définition même d'une fonction strictement croissante. Donc la fonction f est strictement croissante sur les nombres positifs.

4. *Refaire le même raisonnement avec a et b deux nombres négatifs, et en déduire le sens de variations de f sur* $]-\infty; 0]$. Soient a et b deux nombres négatifs, tels que $a < b$. Alors

nécessairement, a est strictement négatif, et $a+b<0$ (c'est la somme de deux nombres négatifs), et $a-b<0$ (car $a<b$).

Donc $(a+b)(a-b)>0$, car c'est le produit de deux nombres strictement négatifs.

Or $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Donc $a^2-b^2>0$, et $a^2>b^2$, c'est-à-dire $f(a)>f(b)$.

Nous venons de montrer que si $a<b$, alors $f(a)>f(b)$: donc la fonction f est strictement décroissante sur les nombres négatifs.

5. *Conclure en dressant le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. La conjecture de la question 1b est-elle conforme à ce tableau de variations ?* Le tableau de variations est le même que celui de la conjecture de la question 1b.

Exercice 2 (Variations d'une fonction affine)**.** *Le but de l'exercice est d'étudier les variations des fonctions $f : x \mapsto 3x-2$ et $g : x \mapsto -x+1$.*

1. (a) *Tracer dans un repère orthonormé les courbes de f et g, pour des abscisses allant de -1 à 2 et des ordonnées de -5 à 4.* Voir le graphique page 1.

   (b) *Par lecture graphique, conjecturer le tableau de variations de f et g.* Voici les tableaux de variations.

x	$-\infty$	$+\infty$
f	↗	

x	$-\infty$	$+\infty$
g	↘	

2. *Rappeler la définition de* fonction croissante *et* fonction décroissante. Voir question 2 de l'exercice précédent.

3. Étude de f. *Soient a et b deux nombres tels que $a<b$.*

(a) *Compléter le raisonnement suivant avec les signes $<$ et $>$.*

$$\begin{aligned} a &< b \\ 3a &< 3b \\ 3a - 2 &< 3b - 2 \\ f(a) &< f(b) \end{aligned}$$

(b) *En déduire le sens de variations de f.* Nous avons montré que si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$: la fonction f est donc strictement croissante.

4. Étude de g. *Soient a et b deux nombres tels que $a < b$.*

(a) *Compléter le raisonnement suivant avec les signes $<$ et $>$, et en justifiant le passage à la deuxième ligne.*

$$\begin{aligned} a &< b \\ -a &> -b && \text{car on a multiplié par un nombre négatif} \\ -a + 1 &> -b + 1 \\ g(a) &> g(b) \end{aligned}$$

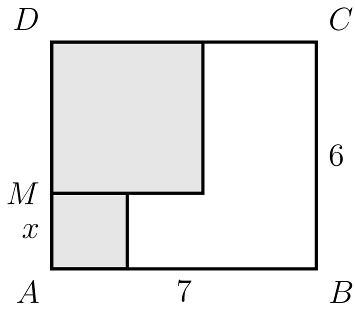
(b) *En déduire le sens de variations de g.* Nous avons montré que si $a < b$, alors $g(a) > g(b)$. C'est la définition même de la décroissance d'une fonction. Donc la fonction g est décroissante sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

5. *Vérifier que les variations trouvées aux questions 3 et 4 correspondent bien aux conjectures de la question 1b.* Les variations correspondent bien aux tableaux conjecturés à la question 1b.

Exercice 3 (Aires)**.**

Pour aménager un parc rectangulaire, un urbaniste a les contraintes suivantes. Le parc doit contenir deux bassins car-

rés (représentés en gris), occupant tout le côté ouest. Le reste (représenté en blanc) est de la pelouse. Les dimensions des deux carrés sont libres, mais la surface des bassins doit être inférieure à la moitié de la surface du parc.



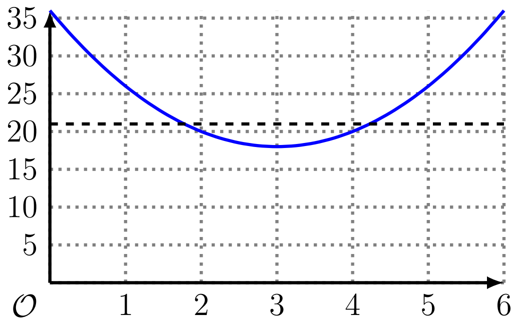
Le problème est représenté ci-dessus : le parc est représenté par le rectangle $ABCD$, et le carré de côté $[AM]$ a pour côté x. Toutes les longueurs sont données en décamètres. On appelle $\mathcal{A}$ l'aire des bassins, en dam^2.

1. *Calculer l'aire totale du parc.* Le parc est un rectangle de côtés 6 et 7 : il a pour aire $6 \times 7 = 42dam^2$.
2. *Quelles sont les valeurs possibles de x ?* Le nombre x représente la distance AM, et M est un point du segment $[AD]$. Donc x est compris entre 0 et 6.
3. *Combien mesure le segment $[DM]$? En déduire que $\mathcal{A} = 2x^2 - 12x + 36$.* Le segment $[DM]$ mesure $6 - x$.

   L'aire grisée est égale à la somme des aires des carrés de côté $[AM]$ et $[DM]$, soit :

$$\begin{aligned}\mathbb{A} &= AM^2 + DM^2 \\ &= x^2 + (6-x)^2 \\ &= x^2 + 36 - 2 \times 6 \times x + x^2 \\ &= 2x^2 - 12x + 36\end{aligned}$$

4. *À la main ou à l'ordinateur, tracer dans un repère la courbe de la fonction $\mathcal{A}$. On prendra des abscisses allant de 0 à 6, et des ordonnées de 0 à 36. Si le tracé est fait à l'ordinateur, imprimer le tracé et le rendre avec la copie.*



5. *Résoudre graphiquement* $\mathcal{A} \leqslant 21$. On trace sur le graphique la droite d'équation $y = 21$ (c'est la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par l'ordonnée 21). Les solutions de l'inéquation sont les abscisses de la courbe situés *en dessous* de cette droite, c'est-à-dire environ $[1,8; 4,2]$.

6. *En expliquant le lien entre la question précédente et le problème de départ, donner les valeurs de x pour lesquelles l'urbaniste respecte les contraintes du parc.* On veut que l'aire des bassins soit inférieure à l'aire de la moitié du parc, soit $\frac{42}{2} = 21$. Nous cherchons donc les valeurs de x pour lesquelles $\mathcal{A} \leqslant 21$. Nous avons résolu (graphiquement) cette inéquation à la question précédente, et les solutions sont $[1,8; 4,2]$.

   Pour respecter les contraintes, le bassin du bas doit être un carré de côté compris entre $1,8dam$ et $4,2dam$.