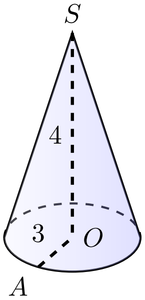
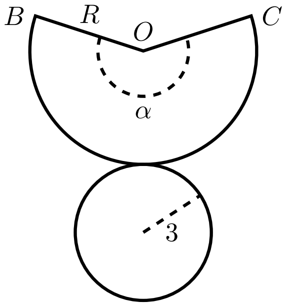
Exercice 1 (Surface d'un cône)**.**





On considère un cône de révolution, dont la base est un cercle de rayon 3 cm, et de hauteur 4 cm. Le but de l'exercice est de déterminer l'aire de ce solide, dont le patron est donné à droite : il est constitué d'un disque (en bas) correspondant à la base du cylindre, et d'une section (un « morceau ») de disque (en haut). On admet que l'aire du solide est égale à l'aire de son patron.

Dans la suite de l'exercice, toutes les longueurs considérées sont en centimètres.

1. *On considère le triangle AOS.*
   (a) *Quelle est sa nature ? Quelle est la longueur des segments $[AO]$ et $[OS]$?* Puisque $[OS]$ est la hauteur du cône de révolution, le triangle OAS est rectangle en O. Par lecture sur le graphique, on voit que $OA = 3$ et $OS = 4$ (toutes les longueurs sont données en cm).
   (b) *En déduire que $SA = 5$.* D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OAS rectangle en O, on a :

$$
\begin{aligned}
AS^2 &= AO^2 + OS^2 \\
AS^2 &= 3^3 + 4^2 \\
AS^2 &= 25 \\
AS &= 5
\end{aligned}
$$

La longueur notée R sur le patron étant égale à SA, nous avons montré que $R = 5$. Nous allons maintenant calculer la valeur de l'angle α.

2. *Calculer le périmètre de la base du cylindre, et le périmètre du cercle (non représenté) de centre O et de rayon R.* Le périmètre d'un cercle de rayon r est donné par la formule $2\pi r$. Donc le périmètre de la base du cylindre est $2\pi \times 3 = 6\pi$, et celui du cercle de rayon R est $2\pi \times 5 = 10\pi$.
3. *La longueur de l'arc de cercle $\widehat{BC}$ est égale au périmètre de la base. D'autre part, le périmètre d'un arc de cercle est proportionnel à l'angle correspondant. Compléter le tableau de proportionnalité suivant.*

Angle (en degrés)	α	360
Longueur de l'arc de cercle de rayon 5	6π	10π

4. *En déduire que $\alpha = 216\,°$.* Puisque c'est un tableau de proportionnalité, nous avons :
$$\alpha = \frac{360 \times 6\pi}{10\pi} = \frac{360 \times 6}{10} = 216$$
Donc la mesure de l'angle α est 216°.
5. *L'aire d'une section de disque étant proportionnelle à son angle, calculer l'aire de la section de disque OBC.* D'abord, notons que l'aire d'un disque de rayon 5 est $\pi \times 5^2 = 25\pi$. On refait un tableau de proportionnalité.

Angle (en degrés)	216	360
Aire de la section de disque de rayon 5	?	25π

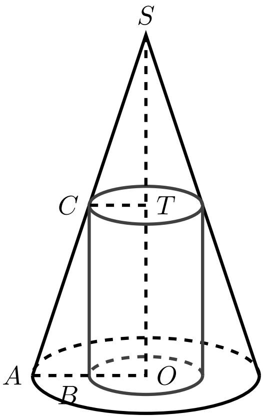
L'aire de la section est donc $\frac{216\times 25\pi}{360} = 15\pi$.
6. *En déduire l'aire du cône.* L'aire du cône est égale à l'aire de la base ($\pi \times 3^2 = 9\pi$) plus l'aire de la surface latérale, dont nous venons de montrer qu'elle est égale à 15π. Donc l'aire est $\mathcal{A} = 9\pi + 15\pi = 24\pi$, soit environ 75 cm^2.

Exercice 2 (Cône et Cylindre)**.**

Un cylindre de révolution est inscrit dans un cône de révolution, comme dans la figure ci-contre. Les points A, B, C, S, T, O sont tels que représentés sur la figure.

Le cône fait 20 cm de hauteur, et sa base a un rayon de 4 cm. La hauteur du cylindre est la moitié de celle du cône.

Les résultats seront arrondis à l'unité.



1. *Déterminer la longueur TO.* Le segment $[TO]$ est la hauteur du cylindre, qui est la moitié de celle du cône. Donc $TO = \frac{SO}{2} = \frac{4}{2} = 2cm$.
2. *Sans justifier, donner la nature du quadrilatère $CTOB$. En déduire la longueur BC et la position relative des droites (CB) et (SO).*Le quadrilatère $CTOB$ est un parallélogramme. Donc, d'une part, les longueurs BC et TO sont égales, et $BC = 2cm$, et d'autre part, les droites (CB) et (SO) sont parallèles.
3. *En se plaçant dans le triangle SAO, prouver que $OB = 2cm$.* On applique l'énoncé des milieux dans le triangle SAO : puisque (CB) et (SO) sont parallèles, et que T est le milieu de $[SO]$, alors CT est égal à la moitié de AO, c'est-à-dire 2cm. Mais puisque $CTOB$ est un parallélogramme, les longueurs BO et CT sont égales, donc $BO = 2cm$.
4. *Calculer le volume V_o du cône.*Appliquons la formule du volume :

$$\begin{aligned} V_o &= \frac{1}{3}\pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur} \\ &= \frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times 20 \\ &\approx 335\ cm^3 \end{aligned}$$

5. *Calculer le volume V_y du cylindre.* De même :

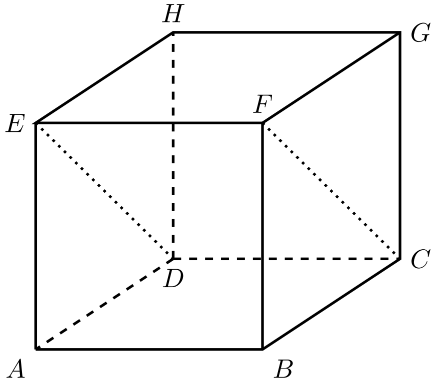
$$\begin{aligned} V_y &= \pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur} \\ &= \pi \times 2^2 \times 10 \\ &\approx 126\ cm^3 \end{aligned}$$

6. Question ouverte. *On dispose de deux vases, un cône et un cylindre, aux dimensions étudiées dans cet exercice. On remplit une première fois*

le cylindre d'eau, à ras bord, et on verse le contenu dans le cône. Puis on recommence une seconde fois. L'eau va-t-elle déborder du cône, ou reste-t-il de la place ? S'il reste de la place, peut on verser le contenu d'un troisième cylindre sans faire déborder ? Le volume du cylindre est 126 cm^3, et celui du cône 335 cm^3. En versant le contenu de deux cylindres dans le cône, on obtient un volume de $2 \times 126 = 252$ cm^3, ce qui est inférieur au volume du cône. Donc l'eau ne déborde pas. En revanche, si on ajoute un troisième cylindre, on obtient $252 + 126 = 378$ cm^3, ce qui est supérieur au volume du cône, donc l'eau déborde.

Exercice 3 (Droites et Plans). *On considère un cube $ABCDEFGH$.*

1. *Représenter le cube en perspective cavalière.*



2. (a) *Justifier que $EFCD$ est un parallélogramme.* Les segments $[EF]$ et $[CD]$ sont parallèles et de même longueurs (parallèles car ils sont tous les deux parallèles au segment $[AB]$; de même longueur car ce sont deux arêtes d'un cube). Donc le quadrilatère $EFCD$ est un parallèlogramme.

   (b) *En déduire que la droite (FC) est parallèle au plan (EBD).* La droite (FC) est parallèle à la droite (ED), contenue dans le plan (EBD) : donc la droite (FC) est parallèle au plan (EBD).

3. *En utilisant la même méthode, montrer que la droite (FH) est parallèle au plan (EBD).* Tout d'abord, le quadrilatère $FHDB$ est un parallélogramme (car $[HD]$ et $[FB]$ sont parallèles et de même longueur). Donc la droite (FH) est parallèle à la droite (DB), elle même incluse dans (EDB) : donc (FH) est parallèle à (EDB).

4. *En déduire la position relative des plans (FCH) et (EBD).*

   Le plan (FCH) contient deux droites (FH) et (FB). Ces deux droites sont sécantes, et nous avons montré aux questions précédentes qu'elles sont parallèles au plan (EBD). Donc, puisque le plan (FCH) contient deux droites sécantes parallèles au plan (EBD), ces deux plans sont parallèles.