04/11/15
DM 2

Équations Intervalles

2^{de}10

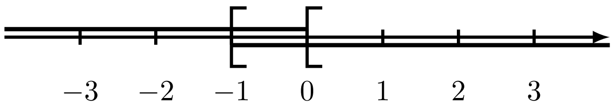
Exercice 1 (Intervalles)**.** *Résoudre chacun des couples d'inéquations suivants, et représenter le résultat sur la droite des réels, puis sous forme d'intervalles.*

(a) $2x < 0$ et $x + 2 \geqslant 1$. Commençons par résoudre séparément chacune des deux équations.

$$\begin{aligned} 2x &< 0 \\ \frac{2x}{2} &< \frac{0}{2} \\ x &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2 &\geqslant 1 \\ x + 2 - 2 &\geqslant 1 - 2 \\ x &\geqslant -1 \end{aligned}$$

Représentons maintenant les solutions sur la droite des réels. Les solutions de l'inéquation de gauche sont représentées au dessus ; celles de l'inéquation de droite sont représentées au dessous.

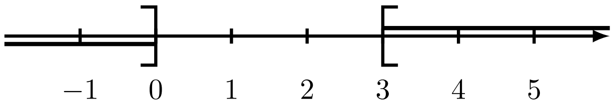


Nous cherchons les valeurs de x qui vérifient les deux équations à la fois (*et*), donc cela correspond à l'ensemble des réels qui appartient aux deux ensembles, c'est-à-dire $[-1; 0[$.

(b) $x \geqslant 3$ et $1 - x \geqslant 1$. Commençons par résoudre séparément chacune des deux équations. Celle de gauche est déjà résolue ; reste celle de droite.

$$\begin{aligned} 1 - x &\geqslant 1 \\ 1 - x - 1 &\geqslant 1 - 1 \\ -x &\geqslant 0 \\ -1 \times (-x) &\leqslant -1 \times 0 \\ x &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Représentons maintenant les solutions sur la droite des réels. Les solutions de l'inéquation de gauche sont représentées au dessus ; celles de l'inéquation de droite sont représentées au dessous.



Nous cherchons les valeurs de x qui vérifient les deux équations à la fois (*et*), donc cela correspond à l'ensemble des réels qui appartient aux deux ensembles. Les deux ensembles ne sont pas superposés : il n'y a pas de solutions, ce que l'on peut noter $x \in \varnothing$.

(c) $2x < 0$ ou $x + 2 \geqslant 1$. La résolution des deux inéquations est la même qu'à la question ((a)), de même que le tracé sur la droite des réels. En revanche, nous cherchons cette fois ci les valeurs de x qui vérifient une des deux équations, ou les deux (*ou*), donc cela correspond à l'ensemble des réels qui appartient à l'un ou à l'autre des deux ensembles (ou aux deux), c'est-à-dire l'ensemble des réels, que l'on peut noter $\mathbb{R}$ ou $]-\infty; +\infty[$.

(d) $x \geqslant 3$ ou $1 - x \geqslant 1$. La résolution des deux inéquations est la même qu'à la question ((b)), de même que le tracé sur la droite des réels. En revanche, nous cherchons cette fois ci les valeurs de x qui vérifient une des deux équations, ou les deux (*ou*), donc cela correspond à l'ensemble des réels qui appartient à l'un ou à l'autre des deux ensembles (ou aux deux). Cet ensemble est une union de deux intervalles que l'on note $]-\infty; 0] \cup [3; +\infty[$.

Exercice 2 (Lieu géométrique)**.** *Dans un repère orthonormé, on considère deux points $A\,(-5; 0)$ et $B\,(5; 0)$. Le point M a pour coordonnées $(x; 4)$: son ordonnée est 4, mais son abscisse n'est pas précisée.*

La question que l'on se pose est : Quelle doit être l'abscisse x de M pour que le triangle ABM soit rectangle en M ?

1. *Calculer (en fonction de x) les longueurs AB, AM et BM.* Nous appliquons la formule donnant la longueur d'un segment dans un repère

orthonormé.

$$
\begin{aligned}
AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\
&= \sqrt{(5 - (-5))^2 + (0 - 0)^2} \\
&= \sqrt{100 + 0} \\
&= 10
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
AM &= \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} \\
&= \sqrt{(x - (-5))^2 + (4 - 0)^2} \\
&= \sqrt{(x + 5)^2 + 16}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
BM &= \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2} \\
&= \sqrt{(x - 5)^2 + (4 - 0)^2} \\
&= \sqrt{(x - 5)^2 + 16}
\end{aligned}
$$

2. *Montrer que le triangle ABM est rectangle en M si et seulement si* $(x-5)^2+16+(x+5)^2+16 = 100$. D'après le théorème de Pythagore, le triangle ABM est rectangle en M si et seulement si :

$$
\begin{aligned}
AM^2 + BM^2 &= AB^2 \\
\sqrt{(x + 5)^2 + 16}^2 + \sqrt{(x - 5)^2 + 16}^2 &= 10^2 \\
(x + 5)^2 + 16 + (x - 5)^2 + 16 &= 100
\end{aligned}
$$

3. *Montrer que l'équation précédente est équivalente à $x^2 - 9 = 0$.*

$$\begin{aligned}
(x+5)^2 + 16 + (x-5)^2 + 16 &= 100 \\
(x+5)^2 + (x-5)^2 + 32 &= 100 \\
(x+5)^2 + (x-5)^2 + 32 - 100 &= 0 \\
(x+5)^2 + (x-5)^2 - 68 &= 0 \\
x^2 + 2 \times 5x + 5^2 + x^2 - 2 \times 5x + 5^2 - 68 &= 0 \\
x^2 + 10x + 25 + x^2 - 10x + 25 - 68 &= 0 \\
2x^2 + 50 - 68 &= 0 \\
2x^2 - 18 &= 0 \\
x^2 - 9 &= 0
\end{aligned}$$

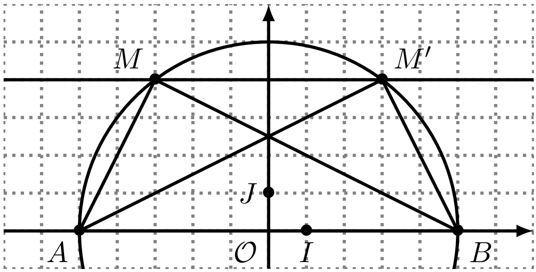
4. *Résoudre l'équation, et en déduire les positions possibles de M telles que ABM soit rectangle en M.*

   L'expression $x^2 - 9$ est une identité remarquable et se factorise en $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x-3)(x+3)$. Donc :

$$\begin{gathered}
x^2 - 9 = 0 \\
(x-3)(x+3) = 0 \\
x - 3 = 0 \text{ ou } x + 3 = 0 \\
x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -3
\end{gathered}$$

   L'équation a deux solutions 3 et -3. Le point M a donc deux solutions possibles pour que le triangle ABM soit rectangle, de coordonnées $(-3; 4)$ et $(3; 4)$.

5. *Comment aurions-nous pu résoudre ce problème graphiquement (sans faire tous ces calculs, mais en n'obtenant seulement une solution approchée) ? Les solutions trouvées sont-elles les mêmes que celles trouvées par le calcul ?* Vous avez vu au collège le résultat suivant : L'ensemble des points M tels que ABM soit un triangle rectangle en M est le cercle de diamètre $[AB]$ (sauf A et B). Pour résoudre le problème, il faut donc tracer ce cercle, et les solutions possibles pour M sont les intersections de ce cercle et de la droite d'équation $y = 4$.



Les deux solutions trouvées graphiquement (M et M' sur le graphique) ont pour coordonnées $(-3;0)$ et $(3;0)$, ce qui correspond bien aux solutions trouvées par le calcul.