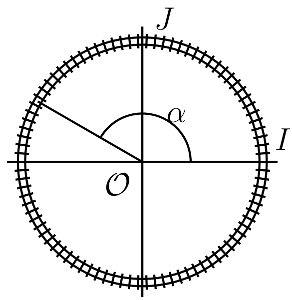
Exercice 1 (Radians — 6 points).

Une petite fille joue avec son train électrique, dont les rails forment un cercle de rayon 1. Le train part du point I.



1. *Quelle distance le train a-t-il parcouru quand il a fait un tour du cercle ?* Le cercle a pour rayon 1, donc son périmètre est $2\pi r = 2\pi \times 1 = 2\pi$.
2. *On observe que le train passe au point J. Donner deux distances possibles que le train a pu parcourir depuis le point I.* Par exemple : $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$, etc.
3. *À un moment donné, l'angle décrit par le train, le centre du cercle et le point I est de 150°(angle α sur la figure).*
   (a) *Convertir l'angle α en radians.* Degrés et radians sont proportionnels, et nous savons que 180ř $= \pi$ rad. Donc :

Degrs	180	150
Radians	π	?

   Donc le nombre recherché est $\frac{150\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$.

   (b) *Quelle distance a pu parcourir le train depuis le point I à ce moment-là (donner une réponse possible) ?* La mesure de l'angle en radian correspond à cette mesure, soit $\frac{5\pi}{6}$.

Exercice 2 (Fonction carré — 3 points).

1. *Calculer les valeurs exactes des carrés des nombres suivants : -7 ; $2\sqrt{3}$.*

$$(-7)^2 = 49$$

$$\begin{aligned}\left(2\sqrt{3}\right)^2 &= 2^2 \times \sqrt{3}^2 \\ &= 4 \times 3 \\ &= 12\end{aligned}$$

2. *Ordonner, sans les calculer, les couples de nombres suivants :* $(-102)^2$ *et* $(-107)^2$ *;* $(0,706)^2$ *et* $(0,7)^2$*.*
   On a $-102 > -107$, et la fonction carré est décroissante sur les négatifs, donc $(-102)^2 < (-107)^2$.
   On a $0,706 > 0,7$, et la fonction carré est croissante sur les positifs, donc $0,706^2 > 0,7^2$.

Exercice 3 (Bénéfices — 11 points)**.**

1. *On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f : x \mapsto -x^2 + 7x - 10$$

   (a) *Montrer que $f(x) = -(x-2)(x-5)$.*

$$\begin{aligned}f(x) = -(x-2)(x-5) &= -\left(x^2 - 5x - 2x + 10\right) \\ &= -\left(x^2 - 7x + 10\right) \\ &= -x^2 + 7x - 10 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

   (b) *Résoudre $f(x) = 0$.* On utilise la forme factorisée : $-(x-2)(x-5$ 0 si et seulement si $x - 2 = 0$ ou $x - 5 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x = 2$ ou $x = 5$.

   (c) *En utilisant un tableau de signes, résoudre :*

$$f(x) \geqslant 0$$

$$\begin{aligned}f(x) &\geqslant 0 \\ -(x-2)(x-5) &\geqslant 0 \\ (x-2)(x-5) &\leqslant 0\end{aligned}$$

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$x - 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 5$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)(x-5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $(x-2)(x-5) \leqslant 0$ si et seulement si $x \in [2;5]$, et donc $f(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \in [2;5]$.

(d) i. *Dresser le tableau de variations de f.* Le facteur de x^2 est -1, négatif, donc la fonction est croissante puis décroissante. L'abscisse du sommet est en $-\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2\times -1} = \frac{7}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$-x^2+7x-10$		$\nearrow$		$\searrow$	

ii. *Quel est le maximum de f ?* Le maximum de f est atteint en $\frac{7}{2}$, et c'est $f\left(\frac{7}{2}\right) = -\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 7 \times \frac{7}{2} - 10 = \frac{9}{4}$.

2. *On considère que le nombre $f(x)$ correspond au bénéfice tiré de la vente de x milliers de chaises par un artisan (par exemple, il gagnera $f(2)$ euros pour la vente de 2000 chaises).*

   En utilisant les résultats de la question précédente, répondre aux questions suivantes.

   (a) *Combien de chaises que l'artisan doit-il fabriquer pour réaliser un bénéfice positif ?* Cela correspond à $f(x) \geqslant 0$, donc la réponse est $x \in [2;5]$. Il doit donc fabriquer entre deux mille et cinq mille chaises.

   (b) *Pour quel nombre de chaises vendues le bénéfice est-il maximal ?* Le maximum de la fonction est en $x = \frac{7}{2}$, donc le bénéfice maximal est atteint pour $\frac{7}{2}$ milliers de chaises, soit 3500 chaises.