27/05/15 DS 7

Trinômes Trigonométrie — Sujet A

$2^{de}14$

Exercice 1 (Fonction carré — 3 points).

1. *Calculer les valeurs exactes des carrés des nombres suivants : -3 ; $3\sqrt{2}$.*

$$(-3)^2 = 9$$

$$\begin{aligned}\left(3\sqrt{2}\right)^2 &= 3^2 \times \sqrt{2}^2 \\ &= 9 \times 2 \\ &= 18\end{aligned}$$

2. *Ordonner, sans les calculer, les couples de nombres suivants : $(-1728)^2$ et $(-1729)^2$; $(0,301)^2$ et $(0,3)^2$.*

   On a $-1728 > -1729$, et la fonction carré est décroissante sur les négatifs, donc $(-1728)^2 < (-1729)^2$.

   On a $0,301 > 0,3$, et la fonction carré est croissante sur les positifs, donc $0,301^2 > 0,3^2$.

Exercice 2 (Bénéfices — 11 points).

1. *On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f : x \mapsto -x^2 + 5x - 4$$

   (a) *Montrer que $f(x) = -(x-1)(x-4)$.*

$$\begin{aligned}f(x) = -(x-1)(x-4) &= -\left(x^2 - 4x - x + 4\right) \\ &= -\left(x^2 - 5x + 4\right) \\ &= -x^2 + 5x - 4 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

   (b) *Résoudre $f(x) = 0$.* On utilise la forme factorisée : $-(x-1)(x-4) = 0$ si et seulement si $x - 1 = 0$ ou $x - 4 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x = 1$ ou $x = 4$.

(c) *En utilisant un tableau de signes, résoudre :*

$$f(x) \geqslant 0$$

$$\begin{aligned} f(x) &\geqslant 0 \\ -(x-1)(x-4) &\geqslant 0 \\ (x-1)(x-4) &\leqslant 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 4$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $(x-1)(x-4) \leqslant 0$ si et seulement si $x \in [1;4]$, et donc $f(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \in [1;4]$.

(d) i. *Dresser le tableau de variations de f.* Le facteur de x^2 est -1, négatif, donc la fonction est croissante puis décroissante. L'abscisse du sommet est en $-\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2\times -1} = \frac{5}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$-x^2 + 5x - 4$		$\nearrow$		$\searrow$	

ii. *Quel est le maximum de f ?* Le maximum de f est atteint en $\frac{5}{2}$, et c'est $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5 \times \frac{5}{2} - 4 = \frac{9}{4}$.

2. *On considère que le nombre $f(x)$ correspond au bénéfice tiré de la vente de x milliers de chaises par un artisan (par exemple, il gagnera $f(2)$ euros pour la vente de 2000 chaises).*

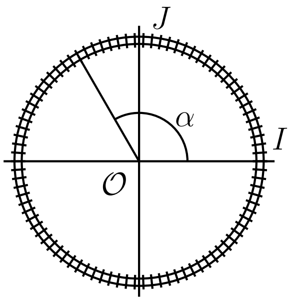
   En utilisant les résultats de la question précédente, répondre aux questions suivantes.

   (a) *Combien de chaises que l'artisan doit-il fabriquer pour réaliser un bénéfice positif ?* Cela correspond à $f(x) \geqslant 0$, donc la réponse est $x \in [1;4]$. Il doit donc fabriquer entre mille et quatre mille chaises.

(b) *Pour quel nombre de chaises vendues le bénéfice est-il maximal ?* Le maximum de la fonction est en $x = \frac{5}{2}$, donc le bénéfice maximal est atteint pour $\frac{5}{2}$ milliers de chaises, soit 2500 chaises.

Exercice 3 (Radians — 6 points)**.**

Une petite fille joue avec son train électrique, dont les rails forment un cercle de rayon 1. Le train part du point I.



1. *Quelle distance le train a-t-il parcouru quand il a fait un tour du cercle ?* Le cercle a pour rayon 1, donc son périmètre est $2\pi r = 2\pi \times 1 = 2\pi$.
2. *On observe que le train passe au point J. Donner deux distances possibles que le train a pu parcourir depuis le point I.* Par exemple : $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$, etc.
3. *À un moment donné, l'angle décrit par le train, le centre du cercle et le point I est de 120°(angle α sur la figure).*

   (a) *Convertir l'angle α en radians.* Degrés et radians sont proportionnels, et nous savons que 180ř $= \pi$ rad. Donc :

Degrs	180	120
Radians	π	?

   Donc le nombre recherché est $\frac{120\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$.

   (b) *Quelle distance a pu parcourir le train depuis le point I à ce moment-là (donner une réponse possible) ?* La mesure de l'angle en radian correspond à cette mesure, soit $\frac{2\pi}{3}$.