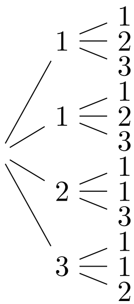
21/04/15
DS 6

Droites Probabilités
Sujet A

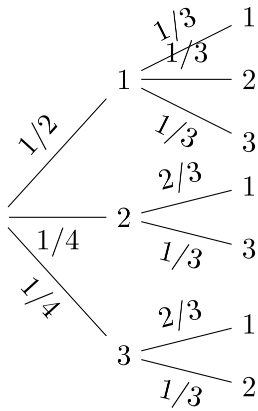
$2^{de}14$

Exercice 1 (Urne — 4 points)**.** *Une urne contient quatre boules numérotées de 1, 1, 2 et 3. On pioche successivement, sans remise, deux boules dans l'urne.*

1. *Représenter l'expérience par un arbre.* Nous présentons deux manières différentes : dans celle de gauche, les branches sont équiprobables : chaque chemin a la même probabilité $\frac{1}{12}$. Dans celle de droite, les probabilités sont indiquées sur l'arbre.



Toutes les branches sont équiprobables.



2. *Calculer la probabilité des évènements suivants :* Le raisonnement est fait avec l'arbre de droite.

   A : *« la somme des deux boules fait 3 » ;* L'ensemble des issues de cet évènement est $\{12; 21\}$, et les probabilités respectives sont : $P(12) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, et de même, $P(21) = \frac{1}{6}$. Donc :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(12) + P(21) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{6} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

B : *« la première boule tirée porte le numéro 2 ».* Nous pouvons faire un raisonnement similaire, ou nous pouvons dire qu'au premier tirage, il y a quatre boules disponibles, équiprobables, et une seule boule avec le numéro 2, donc $P(B) = \frac{1}{4}$.

Exercice 2 (Évènements — 5 points)**.** *On dispose de deux dés équilibrés à six faces, l'un vert, et l'autre bleu. On lance les deux dés et on s'intéresse aux nombres obtenus. On considère les deux évènements suivants :*

- A *: « La somme des deux nombres fait 8. »*
- B *: « Le nombre obtenu avec le dé bleu est supérieur ou égal à celui obtenu avec le dé vert. »*

On donne les probabilités suivantes :

- $P(A) = \frac{5}{36}$
- $P(B) = \frac{21}{36}$
- $P(A \cap B) = \frac{3}{36}$

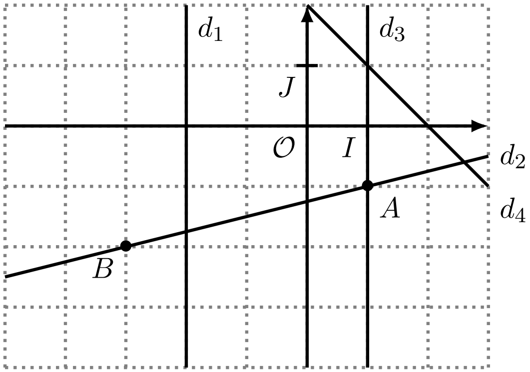
1. *Décrire par une phrase en français les évènements* $A \cap B$ *et* $\bar{B}$*.*
   - $A \cap B$: La somme des deux nombres fait 8, et le nombre obtenu avec le dé bleu est supérieur ou égal à l'autre.
   - $\bar{B}$: Le nombre obtenu avec le dé bleu est strictement inférieur à l'autre.
2. *Calculer* $P(A \cup B)$*.* On a :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{5}{36} + \frac{21}{36} - \frac{3}{36} \\ &= \frac{23}{36} \end{aligned}$$

3. *Calculer* $P\left(\bar{B}\right)$*.* On a :

$$\begin{aligned} P\left(\bar{B}\right) &= 1 - P(B) \\ &= 1 - \frac{21}{36} \\ &= \frac{15}{36} \end{aligned}$$

Exercice 3 (Droites — 7 points)**.**



1. *Donner les équations des droites d_1, d_2.* La droite d_1 est parallèle à l'axe des ordonnée, et elle passe par le point d'ordonnée -2. Donc son équation est $d_1 : x = -2$.

   La droite d_2 n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, donc son équation est de la forme $y = ax+b$. Prenons deux points $A\,(1;-1)$ et $B\,(-3;-2)$ sur la droite. Donc :

   $$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-(-1)}{-3-1} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

   Or A est sur la droite, donc ses coordonnées vérifient l'équation, donc $-1 = \frac{1}{4} \times 1 + b$. La résolution de cette équation nous donne $b = -\frac{5}{4}$. Donc $d_2 : y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

2. *Tracer les droites d_3, d'équation $x = 1$, et d_4, d'équation $y = -x+2$.* La droite d_3 est parallèle à l'axe des ordonnées, d'abscisse 1. Pour d_4, on prend deux points sur la droite (par exemple, si $x = 0$ alors $y = -0+2 = 2$, et si $x = 2$ alors $y = -2+2 = 0$). Donc la droite passe par les points de coordonnées $(0;2)$ et $(2;0)$.

3. *Sans tracer la droite d_5, d'équation $y = 3x - 12$, donner la position relative des droites d_5 et d_4. Justifier.* Les droites d_4 et d_5 ont toutes les deux des équations de la forme $y = mx+p$, mais leurs coefficients directeurs sont différents : elles sont sécantes.

4. *Résoudre le système suivant :* $\begin{cases} y = 3x+3 \\ y = 3x-12 \end{cases}$ *. En déduire la position*

relative des droites d_5 et d_6, d'équation $y = 3x + 3$.

$$\begin{cases} y = 3x + 3 \\ y = 3x - 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 3 \\ y - y = 3x - 12 - (3x + 3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 3 \\ 0 = -15 \end{cases}$$

Le système n'a pas de solutions, donc les deux droites sont strictement parallèles.

Exercice 4 (Problème ouvert — 4 points)**.** *Deux entreprises A et B emploient deux types de personnel : des cadres et des ouvriers.*

— *L'entreprise A emploie 10 cadres et 15 ouvriers. Le salaire moyen des cadres est 3070 € et celui des ouvriers 1800 €.*

— *L'entreprise B emploie 50 personnes. Le salaire moyen des cadres est 2930 € et celui des ouvriers 1700 €.*

Le directeur financier de l'entreprise B affirme que le salaire moyen pour l'ensemble de ses employés est supérieur à celui de l'entreprise A. Est-ce possible ?

La moyenne des salaires de l'entreprise A est $\frac{10\times3070+15\times1800}{10+20} = 2308$.

Méthode rapide Si l'entreprise B a 49 cadres et un seul ouvrier, le salaire moyen est $\frac{49\times2930+1\times1700}{50} = 2905,4$. Cette moyenne est plus élevée que celle de l'entreprise A, donc l'affirmation de l'énoncé est possible.

Méthode moins rapide Cherchons un nombre x de cadres et y d'ouvriers pour l'entreprise B tels que la moyenne des salaires de l'entreprise B soit égale à celle de A. Cela donne le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ \frac{x\times2930+y\times1700}{50} = 2308 \end{cases}$$

Une fois résolue (je vous laisse faire), nous trouvons $x \approx 24,7$ et $y \approx 25,3$. Donc à partir de 25 cadres et 25 ouvriers, le salaire de l'entreprise B est plus élevé que celui de l'entreprise A : c'est possible.