11/02/15 **Fonctions affines** *$2^{de}14$*
DS 5 **Vecteurs**

Exercice 1 (Fonctions affines — 7 points). *On considère la fonction affine f passant par les points $A\,(-1;2)$ et $(2;5)$.*

1. (a) *Calculer l'équation de la fonction f.* Le coefficient directeur est $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-2}{2-(-1)} = \frac{3}{3} = 1$. Puisque le point A fait partie de la fonction, on a $2 = -1 \times 1 + b$. La résolution de l'équation donne $b = 3$. L'équation de la fonction est donc $f(x) = x + 3$.

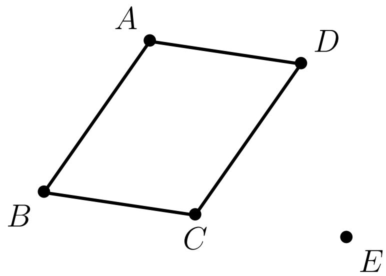
   (b) *La fonction est-elle croissante ou décroissante ?* Son coefficient directeur, 1, est positif, donc elle est croissante.

2. (a) *Dresser le tableau de signes de la fonction $g : x \mapsto -2x+8$, définie sur $\mathbb{R}$.* La fonction est décroissante (car $-2 < 0$, donc elle est positive, puis négative. Elle change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{8}{-2} = 4$.

x	$-\infty$		4		∞
$g(x)$		$+$	0	$-$	

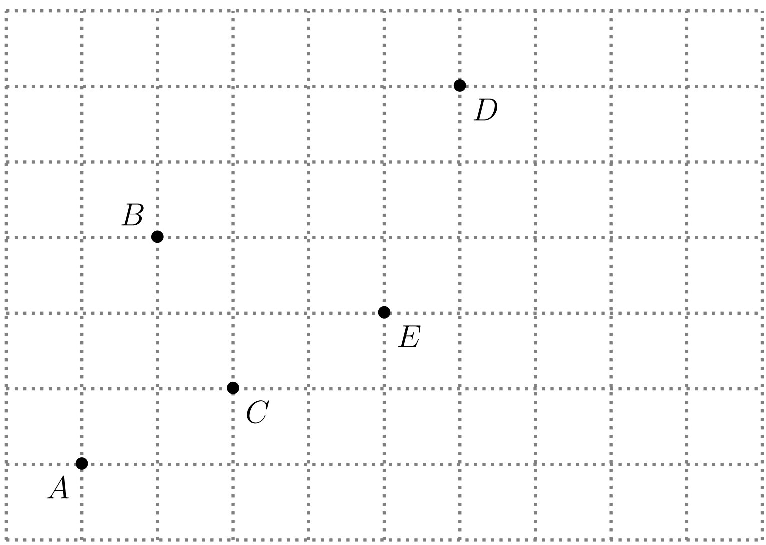
   (b) *Sans calculer sa valeur, dire si $g(10)$ est positif ou négatif.* Puisque $10 > 3$, on lit sur le tableau de signes que $g(10) < 0$.

Exercice 2 (Parallélogramme — 6 points). *On considère un parallélogramme $ABCD$, et un point E tel que C soit le milieu de $[BE]$, comme représentés sur la figure suivante.*



1. *Justifier que* $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE}$. On sait que C est le milieu de $[BE]$, donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE}$.
2. *Quelle est la relation entre* $\overrightarrow{AD}$ *et* $\overrightarrow{CE}$ *? Justifier.* Nous avons montré que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE}$. De plus, puisque $ABCD$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}$.
3. *En déduire la nature du quadrilatère* $ADEC$. Puisque $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}$, $ADEC$ est donc un parallélogramme.

Exercice 3 (Placer des points — 7 points)**.** *On considère les points* A*,* B*,* C *suivants.*



1. *Placer le point D tel que $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AC}$.* Voir la figure.
2. *On aimerait placer E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BD}$, mais placer ce point directement ferait sortir de la feuille. Nous allons faire autrement.*
   (a) *Montrer que $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$.* On sait que $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BD} &= 2\overrightarrow{AC} \\
\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \\
\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \\
\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

   (b) *En déduire que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$.*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AE} &= 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BD} \\
\overrightarrow{AE} &= 2\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD}\right) \\
\overrightarrow{AE} &= 2\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

   (c) *Placer enfin le point E.* Voir la figure.

Exercice 4 (Bonus — 1 points)**.** *Soient A et B deux points distincts. Lequel des deux vecteurs suivants a la plus grande norme : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA}$, ou $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$? Justifier.*

D'une part, on a : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$. Puisque A et B sont distincts, la norme de ce vecteur est donc deux fois la longueur AB. D'autre part, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$. Le vecteur nul a une norme nulle. Donc le premier vecteur a la plus grande norme.