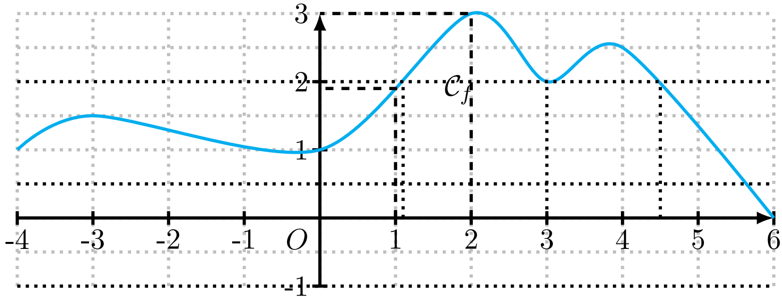
Exercice 1 (Images et antécédents — 7 points)**.** *Répondre aux questions par lecture graphique.*

1. *On considère la fonction f représentée ci-dessous.*



   (a) *Déterminer $f(1)$.* $f(1) = 1,9$

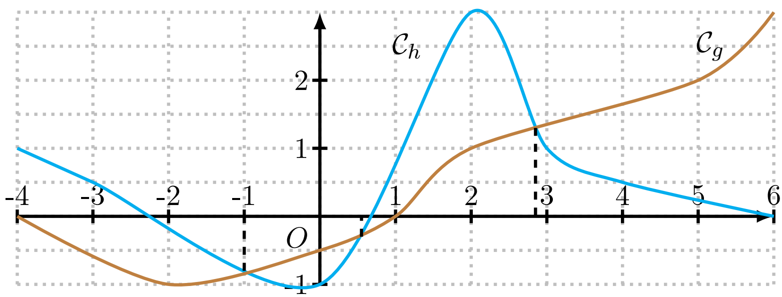
   (b) *Déterminer l'image de 2 par f.* $f(2) = 3$

   (c) *Quels sont le(s) antécédent(s) de 2 par f ?* Les antécédents sont $1,1$, 3 et $4,5$.

   (d) *Résoudre graphiquement $f(x) = -1$.* Il n'y a pas de solutions.

   (e) *Déterminer un nombre k tel que $f(x) = k$ ait une seule solution.* Par exemple, pour $k = 0,5$, l'équation $f(x) = 0,5$ n'a qu'une solution.

2. *Déterminer les solutions de $g(x) = h(x)$ (où les courbes de g et h sont représentées ci-dessous).*

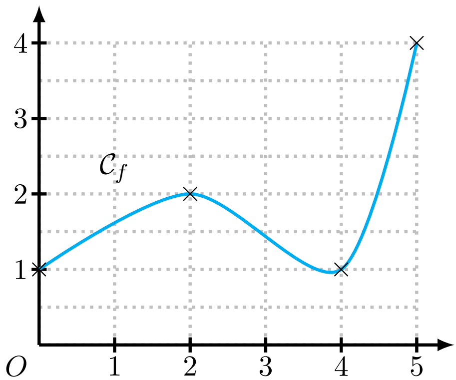


Les solutions sont les abscisses des points d'intersection des courbes de g et h, c'est-à-dire : -1, $0,6$, $2,9$.

Exercice 2 (Variations — 4 points)**.** Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	0		2		4		5
f	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	4

1. *Comparer $f(3)$ et $f(4)$.* On lit sur le tableau de variations que f est décroissante entre 2 et 4. Or, $3 < 4$, donc $f(3) \geqslant f(4)$.
2. *Tracer la courbe d'une fonction f pouvant correspondre à ce tableau.*



Exercice 3 (Algorithme — 2 points)**.** Dans un magasin, le tarif des photocopies est le suivant :

- Les vingt premières photocopies : 0,1 € pièce ;
- Les trente suivantes : 0,05 € pièce ;
- Toutes les autres : 0,01 € pièce.

Recopier sur votre copie l'algorithme suivant, et le compléter, pour qu'étant donné un nombre n, il affiche le prix de n photocopies.

Commençons par étudier ce qui se passe pour différentes valeurs de n, avec des exemples.

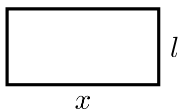
— Supposons que j'achète 15 photocopies. C'est inférieur à 20, donc chacune me coûte 0,1 €, soit 1,5 € au total.

- Supposons maintenant que je fasse 45 photocopies. Les vingt premières coûtent toujours 0,1 €, et les 25 suivantes coûtent moins cher : 0,05 €.
- Enfin, pour 100 photocopies, les 20 premières coûtent $20 \times 0,1$ €, les 30 suivantes coûtent $30 \times 0,05$ €, et les 50 dernières coûtent $50 \times 0,01$ €.

Traduisons cela par un algorithme.

```
Lire n
Si n ⩽ 20
Alors
  Afficher 0,1 × n
Sinon
  Si n ⩽ 50
  Alors
    Afficher 0,1 × 20 + 0,05 × (n−20)
  Sinon
    Afficher 0,1 × 20 + 0,05 × 30 + 0,01 × (n−50)
FinSi
```

Exercice 4 (Problème — 7 points)**.** Une fermière dispose de 100 m de cloture pour faire paître ses moutons. Elle souhaite faire une cloture rectangulaire qui ait la plus grande aire possible.



On appelle x et l les longueurs des côtés en mètres.

1. (a) *Exprimer le périmètre en fonction de x et l.* Le périmètre du rectangle est $2l + 2x$.

   (b) *En déduire que $l = 50 - x$.* On sait que le périmètre de l'enclos est $100m$. Donc :

$$\begin{aligned} 2l + 2x &= 100 \\ \frac{2l + 2x}{2} &= \frac{100}{2} \\ l + x &= 50 \\ l &= 50 - x \end{aligned}$$

2. *On appelle $\mathcal{A}(x)$ l'aire de l'enclos, en m^2, en fonction de x.*

(a) *Quel est le domaine de définition de $\mathcal{A}$?* La variable x est une longueur, donc x est supérieur à 0, et si x est supérieur à 50, alors $l = 50 - x$ serait négatif, ce qui n'est pas possible (car l aussi est une longueur). Bilan : le domaine de définition de $\mathcal{A}$ est $[0; 50]$.

(b) *Montrer que $\mathcal{A}(x) = x\,(50 - x)$.* L'aire d'un rectangle est le produit de la longueur par la largeur, soit $\mathcal{A}(x) = l \times x$. Mais $l = 50 - x$, donc $\mathcal{A}(x) = (50 - x)\,x$.

3. *Le tableau de variations de $\mathcal{A}$ est le suivant.*

x	0		25		50
$\mathcal{A}$	0	$\nearrow$	625	$\searrow$	0

Quel est l'aire maximale que peut prendre l'enclos ? Quelle est alors la forme de l'enclos ? On lit sur le tableau de variations que le maximum de la fonction est 625. Donc l'aire maximale de l'enclos est $625m^2$. Ce maximum est atteint pour $x = 25$. Dans ce cas, $l = 50 - x = 50 - 25 = 25$. Nous avons donc un rectangle de côtés 25 et 25 : c'est un carré.

4. Bonus *Avec la même longueur de cloture, est-il possible de faire un enclos encore plus grand ?* Si la fermière dispose sa bordure en cercle et non pas en rectangle, elle peut faire en enclos encore plus grand.