Corrigé

Exercice 1 (Développement et Factorisation — 6 points)**.**
On considère la fonction définie par $f(x) = (x+2)^2 + (x+2)(x-1)$.

(1) (a) *Montrer que* $f(x) = (x+2)(2x+1)$. Il y a différentes manières de faire (l'une d'entre elle est de développer toutes les expressions pour montrer qu'on obtient même chose). En voici une obtenue en factorisant par $x+2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)^2 + (x+2)(x-1) \\ &= (x+2)\left[(x+2)+(x-1)\right] \\ &= (x+2)\left[x+2+x-1\right] \\ &= (x+2)(2x+1) \end{aligned}$$

(b) *Montrer que* $f(x) = 2x^2+5x+2$. On part de l'expression $f(x) = (x+2)(2x+1)$ (nous aurions tout aussi bien partir de l'expression originale, mais les calculs sont un peu plus simples comme cela).

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)(2x+1) \\ &= x \times 2x + x \times 1 + 2 \times 2x + 2 \times 1 \\ &= 2x^2 + 5x + 2 \end{aligned}$$

(2) (a) *Résoudre* $f(x) = 0$. On part de l'expression $f(x) = (x+2)(2x+1)$:

$$f(x) = 0$$
$$(x+2)(2x+1) = 0$$
$$x+2 = 0 \text{ ou } 2x+1 = 0$$
$$x = -2 \text{ ou } 2x = -1$$
$$x = -2 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

(b) *Résoudre* $f(x) = 2$.

Nous partons cette fois de l'expressions développée de f.

$$2x^2 + 5x + 2 = 2$$
$$2x^2 + 5x = 2 - 2$$
$$2x^2 + 5x = 0$$
$$x(2x+5) = 0$$

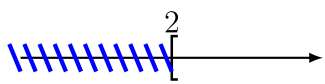
C'est une équation produit, qui donne :

$$x = 0 \text{ ou } 2x + 5 = 0$$
$$x = 0 \text{ ou } 2x = -5$$
$$x = 0 \text{ ou } x = -\frac{5}{2}$$

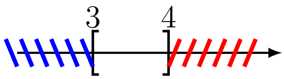
Exercice 2 (Inéquations — 6 points)**.** *Résoudre (si nécessaire) chacun des couples d'inéquations suivant, et présenter les solutions sur la droite des réels, puis sous forme d'intervalle.*

(1)

$$2x + 2 > 4 + x$$
$$2x - x > 4 - 2$$
$$x > 2$$

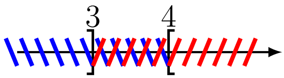


(2) $x < 3$ ou $x > 4$



Puisque l'opérateur est « ou », les solutions sont les parties de la droite qui sont hachurées *au moins une fois*. Les solutions sont donc : $x \in]-\infty; 3[\cup]4; +\infty[$.

(3) $x < 4$ et $x > 3$

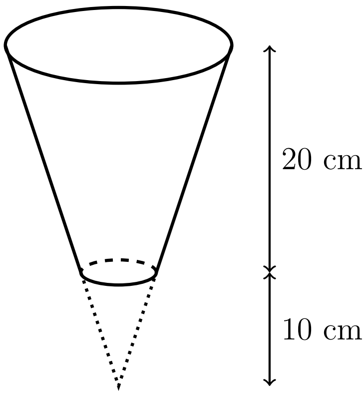


Puisque l'opérateur est « et », les solutions sont les parties de la droite qui sont hachurées *deux fois*. Les solutions sont donc : $x \in]3; 4[$.

Exercice 3 (Volume — 6 points)**.**

Un fleuriste souhaite connaître le volume d'un vase qu'il utilise. Ce vase a la forme d'un cône tronqué, c'est-à-dire d'un cône auquel on a enlevé la partie inférieure (voir ci-contre).

Le rayon du cercle supérieur est 9 cm, celui du cercle inférieur est 5 cm, et les hauteurs sont indiquées sur le schéma.



Les résultats seront arrondis au dixième.

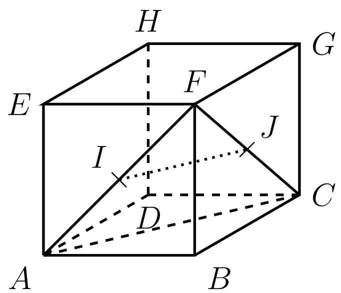
(1) *Calculer le volume du grand cône (avant suppression de la partie tronquée).*

La formule du volume d'un cône de révolution est $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ (où r est le rayon de la base, et h la hauteur). Donc le volume du grand cône est : $\frac{1}{3}\pi \times 9^2 \times 30 = 810\pi = 2544,7cm^3$.

(2) *Calculer le volume de la partie tronquée (en pointillés sur la figure).*
Ce volume est $\frac{1}{3}\pi \times 5^2 \times 10 = \frac{250}{3}\pi = 261,8cm^3$.

(3) *En déduire le volume du vase.*
Le volume du vase est la différence des deux volumes, soit $2544,7 - 261,8 = 2282,9cm^3$.

Exercice 4 (Problème ouvert — 2 points)**.** *On considère le cube $ABCDEFGH$, de côté 2 cm. Le point I est le centre de la face $AEFB$; J est le centre de la face $CGFB$. Quelle est la longueur du segment $[IJ]$?*



Il y a différentes manières de résoudre ce problème. En voici une.

On se place dans le triangle AFC : I est le milieu de $[AF]$, et J le milieu de $[FC]$, donc d'après l'énoncé des mileux, $IJ = \frac{AC}{2}$. Reste à calculer AC.

On se place dans le triangle ABC. Puisque $ABCDEFGH$ est un cube de côté 2 cm, $ABCD$ est un carré de côté 2 cm, et ABC est un triangle rectangle en B. Nous appliquons donc le théorème de Pythagore : $AB^2 + BC^2 = AC^2$, donc $2^2 + 2^2 = AC^2$, et $8 = AC^2$. Donc $AC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Donc $IJ = \frac{AC}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$: la longueur IJ est égale à $\sqrt{2}$ cm, soit environ $1,41$ cm.