

Exercice 1 (Développement et Factorisation — 6 points).

On considère la fonction définie par $f(x) = (x + 1)^2 + (x + 1)(x - 2)$.

- (1) (a) *Montrer que $f(x) = (x + 1)(2x - 1)$. Il y a différentes manières de faire (l'une d'entre elle est de développer toutes les expressions pour montrer qu'on obtient même chose). En voici une obtenue en factorisant par $x + 1$.*

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + 1)^2 + (x + 1)(x - 2) \\ &= (x + 1)[(x + 1) + (x - 2)] \\ &= (x + 1)[x + 1 + x - 2] \\ &= (x + 1)(2x - 1) \end{aligned}$$

- (b) *Montrer que $f(x) = 2x^2 + x - 1$. On part de l'expression $f(x) = (x + 1)(2x - 1)$ (nous aurions tout aussi bien partir de l'expression originale, mais les calculs sont un peu plus simples comme cela).*

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + 1)(2x - 1) \\ &= x \times 2x + x \times (-1) + 1 \times 2x + 1 \times (-1) \\ &= 2x^2 + x - 1 \end{aligned}$$

- (2) (a) Résoudre $f(x) = 0$. On part de l'expression $f(x) = (x + 1)(2x - 1)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ (x + 1)(2x - 1) &= 0 \\ x + 1 &= 0 \text{ ou } 2x - 1 = 0 \\ x &= -1 \text{ ou } 2x = 1 \\ x &= -1 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

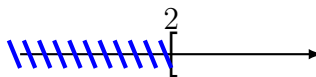
- (b) Résoudre $f(x) = -1$.

<p>Nous partons cette fois de l'expressions développée de f.</p> $\begin{aligned} 2x^2 + x - 1 &= -1 \\ 2x^2 + x &= -1 + 1 \\ 2x^2 + x &= 0 \\ x(2x + 1) &= 0 \end{aligned}$	<p>C'est une équation produit, qui donne :</p> $\begin{aligned} x = 0 \text{ ou } 2x + 1 &= 0 \\ x = 0 \text{ ou } 2x &= -1 \\ x = 0 \text{ ou } x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$
---	---

Exercice 2 (Inéquations — 6 points). Résoudre (si nécessaire) chacun des couples d'inéquations suivant, et présenter les solutions sur la droite des réels, puis sous forme d'intervalle.

- (1)

$$\begin{aligned} 2x + 1 &> 3 + x \\ 2x - x &> 3 - 1 \\ x &> 2 \end{aligned}$$

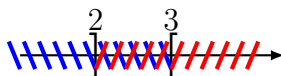


(2) $x < 2$ ou $x > 3$



Puisque l'opérateur est « ou », les solutions sont les parties de la droite qui sont hachurées *au moins une fois*. Les solutions sont donc : $x \in]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$.

(3) $x < 3$ et $x > 2$

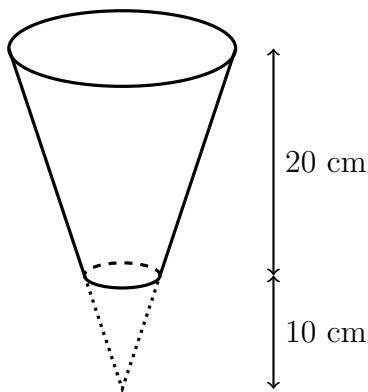


Puisque l'opérateur est « et », les solutions sont les parties de la droite qui sont hachurées *deux fois*. Les solutions sont donc : $x \in]2; 3[$.

Exercice 3 (Volume — 6 points).

Un fleuriste souhaite connaître le volume d'un vase qu'il utilise. Ce vase a la forme d'un cône tronqué, c'est-à-dire d'un cône auquel on a enlevé la partie inférieure (voir ci-contre).

Le rayon du cercle supérieur est 10 cm, celui du cercle inférieur est 6 cm, et les hauteurs sont indiquées sur le schéma.



Les résultats seront arrondis au dixième.

- (1) Calculer le volume du grand cône (avant suppression de la partie tronquée).

La formule du volume d'un cône de révolution est $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ (où r est le rayon de la base, et h la hauteur). Donc le volume du grand cône est : $\frac{1}{3}\pi \times 10^2 \times 30 = 1000\pi = 3141,6\text{cm}^3$.

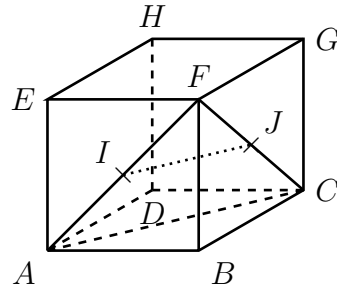
- (2) Calculer le volume de la partie tronquée (en pointillés sur la figure).

Ce volume est $\frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times 10 = 120\pi = 377,0\text{cm}^3$.

- (3) En déduire le volume du vase.

Le volume du vase est la différence des deux volumes, soit $3141,6 - 377,0 = 2764,6\text{cm}^3$.

Exercice 4 (Problème ouvert — 2 points). On considère le cube $ABCDEFGH$, de côté 2 cm. Le point I est le centre de la face $AEFB$; J est le centre de la face $CGFB$. Quelle est la longueur du segment $[IJ]$?



Il y a différentes manières de résoudre ce problème. En voici une.

On se place dans le triangle AFC : I est le milieu de $[AF]$, et J le milieu de $[FC]$, donc d'après l'énoncé des milieux, $IJ = \frac{AC}{2}$. Reste à calculer AC .

On se place dans le triangle ABC . Puisque $ABCDEFGH$ est un cube de côté 2 cm, $ABCD$ est un carré de côté 2 cm, et ABC est un triangle rectangle en B . Nous appliquons donc le théorème de Pythagore : $AB^2 + BC^2 = AC^2$, donc $2^2 + 2^2 = AC^2$, et $8 = AC^2$. Donc $AC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Donc $IJ = \frac{AC}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$: la longueur IJ est égale à $\sqrt{2}$ cm, soit environ 1,41 cm.