**Exercice 1** (Formes d'un trinôme). *On considère les trois fonctions $f$, $g$ et $h$, définies sur $\mathbb{R}$ par :*

- $f : x \mapsto -2\left(2x+2\right)\left(x-3\right)$
- $g : x \mapsto -4x^2+8x+12$
- $h : x \mapsto -4\left(x-1\right)^2+16$

1. *Prouver que les trois fonctions $f$, $g$ et $h$ sont égales.* Soit $x$ un réel quelconque. Développons $f\left(x\right)$.

$$\begin{aligned} f\left(x\right) &= -2\left(2x+2\right)\left(x-3\right) \\ &= -2\left[2x\times x+2x\times(-3)+2\times x+2\times -3\right] \\ &= -2\left[2x^2-6x+2x-6\right] \\ &= -2\left[2x^2-4x-6\right] \\ &= -4x^2+8x+12 \\ &= g\left(x\right) \end{aligned}$$

Donc $f$ et $g$ sont égales. Faisons de même pour $g$.

$$\begin{aligned} h\left(x\right) &= -4\left(x-1\right)^2+16 \\ &= -4\left(x^2-2x+1\right)+16 \\ &= -4x^2+8x-4+16 \\ &= -4x^2+8x+12 \\ &= g\left(x\right) \end{aligned}$$

Donc $h$ et $g$ sont égales. Nous avons montré que $f$, $g$ et $h$ sont égales : ce sont trois formes différentes d'une même fonction.

2. *Utiliser la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes :*
   (a) *Calculer* $f(1)$. N'importe laquelle des trois formes fonctionne. Par exemple :

$$f\left(x\right) = -4\times 1^2+8\times 1+12 = 16$$

(b) *Résoudre* $f(x) = 0$. La première forme est la plus adaptée, car nous reconnaissons une équation produit.

$$\begin{aligned}
-2\,(2x+2)\,(x-3) &= 0 \\
(2x+2)\,(x-3) &= 0 \\
2x+2 = 0 \text{ ou } x-3 &= 0 \\
x = -1 \text{ ou } x &= 3
\end{aligned}$$

(c) *Résoudre* $f(x) = 12$. La seconde forme ($g$) est la plus adaptée :

$$\begin{aligned}
-4x^2+8x+12 &= 12 \\
-4x^2+8x &= 0 \\
x\,(-4x+8) &= 0
\end{aligned}$$

C'est une équation produit, donc $x = 0$ ou $-4x+8 = 0$, c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = 2$.

(d) *Résoudre* $f(x) = 16$. La dernière forme est la plus adaptée.

$$\begin{aligned}
-4\,(x-1)^2+16 &= 16 \\
-4\,(x-1)^2 &= 0 \\
(x-1)^2 &= 0 \\
x-1 &= 0 \\
x &= 1
\end{aligned}$$

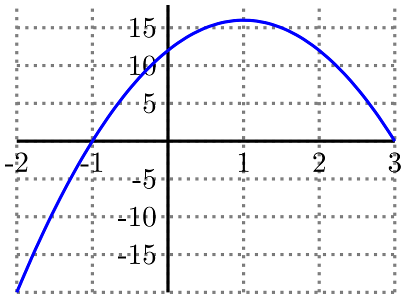
3. *Dresser le tableau de variations de $f$*. Commençons par identifier $a$, $b$ et $c$ sur la fonction :

$$f\,(x) = \underbrace{-4}_{a}\,x^2\,\underbrace{+8}_{b}\,x\,\underbrace{+12}_{c}$$

$a < 0$, donc la fonction est croissante puis décroissante. L'extremum de la fonction a pour abscisse $-\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2\times -4} = 1$. Enfin, $f\,(1) = 16$. Cela donne :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f\,(x)$ | | $\nearrow$ | $16$ | $\searrow$ | |

4. *Tracer la représentation graphique de $f$, pour $x$ allant de -2 à 3, et $y$ allant de $-20$ à 18 (on pourra prendre une échelle différente pour les abscisses et les ordonnées).*




**Exercice 2** (Problème).

*$ABCD$ est un carré de côté 6 cm ; $M$ est un point du segment $[AB]$. On appelle $x$ la longueur $AM$, en centimètres.*

*On construit les carrés $MAQO$ et $ONCP$ tels qu'indiqué sur la figure ci-dessus.*

*On appelle $\mathcal{A}(x)$ l'aire grisée, en cm², et on cherche à répondre à la question : « Pour quelles valeurs de $x$ la valeur de $\mathcal{A}(x)$ est-elle supérieure à 20 cm² ? »*

(1) *Quelles sont les valeurs possibles pour $x$ ?* La variable $x$ est une longueur, donc elle est posivite. Le point $M$ appartient au segment $[AB]$, donc $x$ ne peut pas prendre une valeur plus grande que 6.

(2) *Montrer que $\mathcal{A}(x) = x^2 + (6-x)^2$.* L'aire de la partie grisée est la somme des aires des deux carrés $OMAQ$ et $ONCP$. Le premier carré a pour côté $x$, et le second a pour côté $6-x$, donc :

$$\mathcal{A}(x) = x^2 + (6-x)^2$$

(3) (a) *Montrer que le problème revient à résoudre l'inéquation $2x^2 - 12x + 16 \geqslant 0$.* Nous cherchons les valeurs de $x$ pour lesquelles l'aire est supérieure à 20 cm². Cela signifie :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &\geqslant 20 \\ x^2 + (6-x)^2 &\geqslant 20 \\ x^2 + 36 - 2 \times 6 \times x + x^2 &\geqslant 20 \\ 2x^2 - 12x + 36 - 20 &\geqslant 0 \\ 2x^2 - 12x + 16 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

(b) *Montrer que* $2x^2 - 12x + 16 = (2x-4)(x-4)$. On développe le second membre.

$$\begin{aligned}(2x-4)(x-4) &= 2x \times x + 2x \times (-4) - 4 \times x - 4 \times -4 \\ &= 2x^2 - 8x - 4x + 16 \\ &= 2x^2 - 12x + 16\end{aligned}$$

(c) *Résoudre* $(2x-4)(x-4) \geqslant 0$. C'est une inéquation produit. Il faut donc commencer par déterminer le signe de chaque membre séparément.

Le premier membre $(2x-4)$ correspond à une fonction affine, de coefficient directeur positif (donc négative puis positive), qui change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-4}{2} = 2$.

De même, le second membre $(x-4)$ est une fonction affine de coefficient directeur positif (donc négative puis positive), qui change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4$.

| $x$ | 0 | | 2 | | 4 | | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x-4$ | | $-$ | 0 | $+$ | \| | $+$ | |
| $x-4$ | | $-$ | \| | $-$ | 0 | $+$ | |
| $(2x-4)(x-4)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Donc $(2x-4)(x-4)$ est positif si et seulement si $x \in [0;2] \cup [4;6]$.

(4) *Répondre à la question posée au départ.* Nous avons montré que le problème de départ revient à résoudre $\mathcal{A}(x) \geqslant 0$, et que $\mathcal{A}(x) = (2x-4)(x-4)$. Le signe de cette dernière forme a été étudié à la question précédente. Les solutions sont donc :

$$x \in [0;2] \cup [4;6]$$